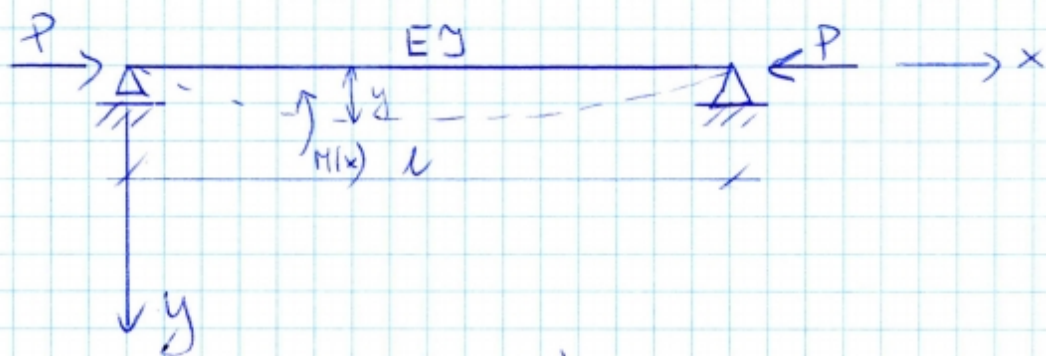


Wytrzymałość materiałów II / - ćwiczenie analityczne 8

Przyjmijmy, że



wiemy, że

$$EI y'' = -M(x)$$

podstawiając $M(x) = P y$ otrzymujemy

$$EI y'' = -P y$$

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0$$

przyjmując $\frac{P}{EI} = k^2$ mamy

$$y'' + k^2 y = 0$$

rozr. ma postać:

$$y = C_1 \cdot \sinh kx + C_2 \cdot \cosh kx$$

war. brzegowe:

$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$

istotne

$$C_2 = 0 \quad i \quad C_1 \cdot \sinh kl + 0 = 0$$

$$C_1 = 0 \quad \text{lub} \quad \sinh kl = 0$$

nie interesuje nas

$$kl = n\pi$$

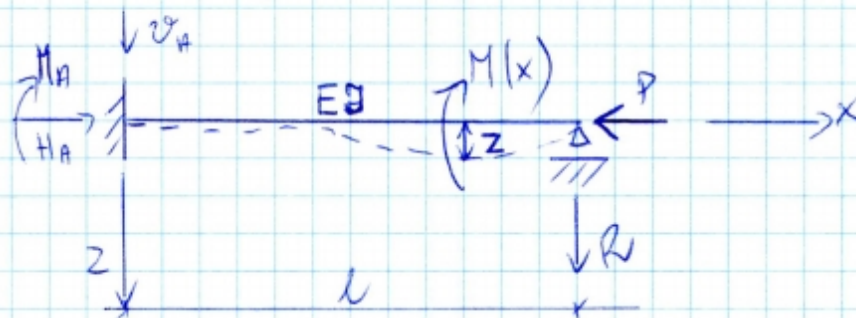
$$\frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad \underline{n=1} \quad \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

zatem

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \quad i \quad y = C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

Zadanie 1 Znajdź P_{cr} .



Wiedząc, że $-M(x) - R(l-x) + Pz = 0$

$$M(x) = Pz - R(l-x)$$

to podstawiając do $EJ z'' = -M(x)$

$$EJ z'' = -Pz + R(l-x)$$

$$z'' = -\frac{P}{EJ} z + \frac{R}{EJ}(l-x)$$

$$\text{czyli } k^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$z'' + k^2 z = \frac{R}{EJ}(l-x)$$

rozwiązanie postaci $z = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + \frac{R}{EJ k^2}(l-x)$
(proszę sobie przebiec' sługol wzięło się to rozwiązanie.)

War. brzegowe: (1) $z(0) = 0$

$$(2) z(l) = 0$$

$$(3) z'(0) = 0$$

zatem

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{Rl}{EJ k^2} = 0 \\ C_1 \cdot \sin kl + C_2 \cdot \cos kl + 0 = 0 \\ C_1 \cdot k + C_2 \cdot k \cdot 0 - \frac{R}{EJ k^2} = 0 \end{cases} \rightarrow C_1, C_2, R$$

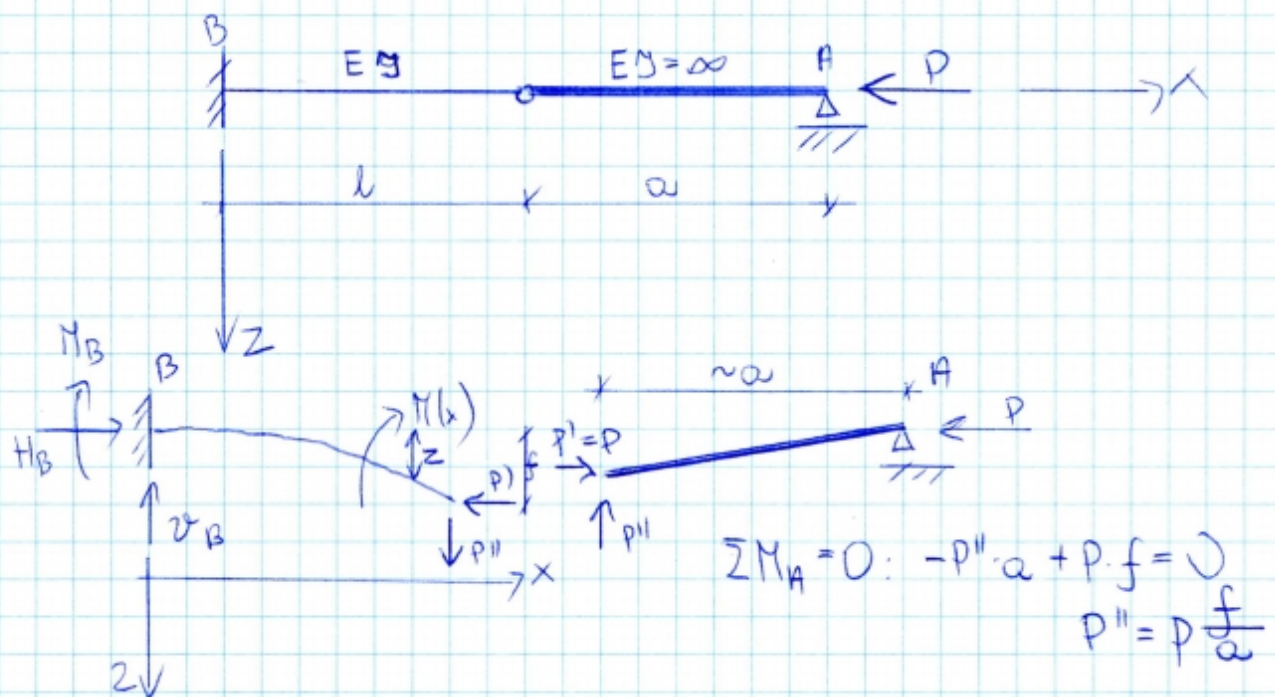
$$\det W = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \frac{R}{EJ k^2} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ k^2} \\ k & 0 & -\frac{1}{EJ k^2} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ k^2} \\ k & 0 & -\frac{1}{EJ k^2} \end{bmatrix} = \cos kl \cdot \frac{l}{EJ k} - \sin kl \cdot \frac{1}{EJ k^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{czyli } kl = kl, \text{ zatem } kl = 4,49$$

$$\text{Mamy } P_{cr} = k^2 \cdot EJ = \frac{(4,49)^2 EJ}{L^2} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 L^2}$$

$$\Rightarrow \mu = 0,699$$

Zadanie 2. Inżynier Pwr.



$$-M(x) - P' \cdot (f - z) - P''(l - x)$$

$$M(x) = -P(f - z) - P \frac{f}{a}(l - x)$$

zatem
$$z'' = \frac{P}{EI} \cdot f - \frac{P}{EI} \cdot z + P \frac{f}{a} \cdot l \frac{1}{EI} - \frac{P}{EI} \frac{f}{a} \cdot x$$

przyjmując $k^2 = \frac{P}{EI}$

$$z'' + k^2 \cdot z = k^2 \cdot f \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

rozw.
$$z = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + f \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

war. brzegowe

(1) $z(0) = 0$

(2) $z'(0) = 0$

(3) $z(l) = f$

otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + f \left(1 + \frac{l}{a}\right) = 0 \\ C_1 \cdot k \cdot 1 - C_2 \cdot 0 \cdot k - f \cdot \frac{1}{a} = 0 \\ C_1 \cdot \sin kl + C_2 \cdot \cos kl + f = f \end{cases}$$

$$\det W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{2} \\ k & 0 & -\frac{1}{2} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{bmatrix} = 0$$

dostajemy $\operatorname{tg} kl = kl \left(\frac{a}{l} + 1 \right)$

rozważmy przypadek

1° $a \rightarrow 0$

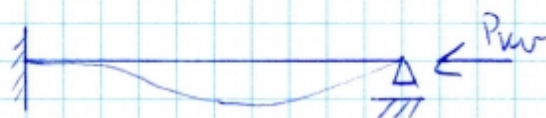
$$\operatorname{tg} kl = kl \Rightarrow$$

$$kl = 4,49$$

$$P_{kr} = k^2 \cdot EJ = \frac{(4,49)^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2}$$

$$\left(\frac{\pi}{4,49} \right)^2 = \mu^2 \Rightarrow \mu = 0,688$$

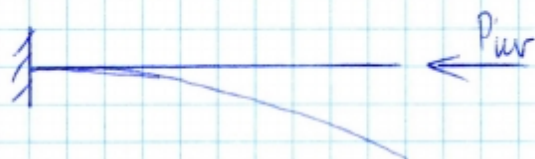
i mamy przypadek



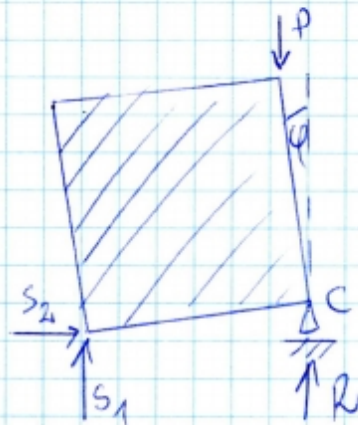
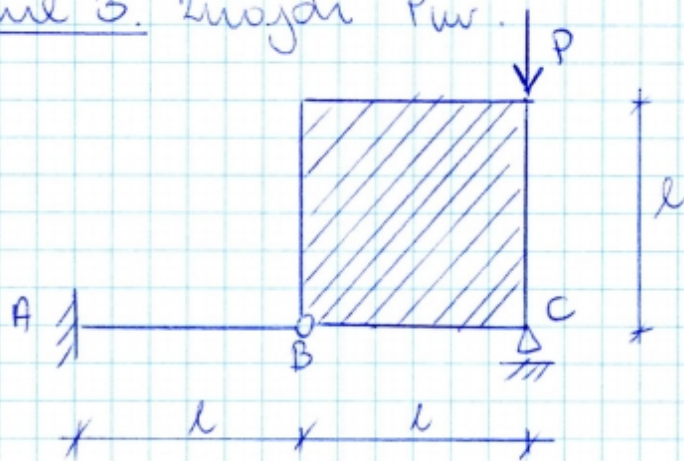
2° $a \rightarrow \infty$ czyli

$$\operatorname{tg} kl = \infty \Rightarrow kl = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{kr} = k^2 \cdot EJ = \frac{\pi^2 EJ}{2^2 l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2} \Rightarrow \mu = 2 \quad \text{i mamy przypadek}$$



Zadanie 3. Znajdź P_{kr} .



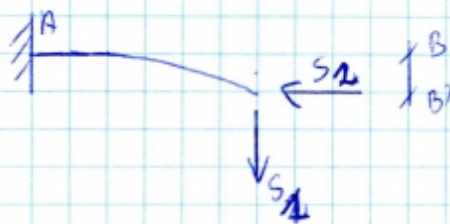
z uw. równowagi

$$(1) S_2 = 0$$

$$(2) \sum M_c = 0$$

$$P \cdot \varphi l - S_1 \cdot l = 0$$

$$S_1 = P \cdot \varphi$$



(3) $|\overline{BB'}| = \varphi l$ - uw. geometryczny
 oraz pamiatajmy (!?!?) że ugięcie wspólne
 obciążonego na końcu siły skupionej wynosi

$$(4) |\overline{BB}| = \frac{S_1 \cdot l^3}{3EI}$$

z (3) i (4) mamy

$$\varphi l = \frac{S_1 \cdot l^3}{3EI} = \frac{P \cdot \varphi l^3}{3EI}$$

$$\varphi \left(1 - \frac{Pl^2}{3EI}\right) = 0$$

$$P_{kr} = \frac{3EI}{l^2}$$