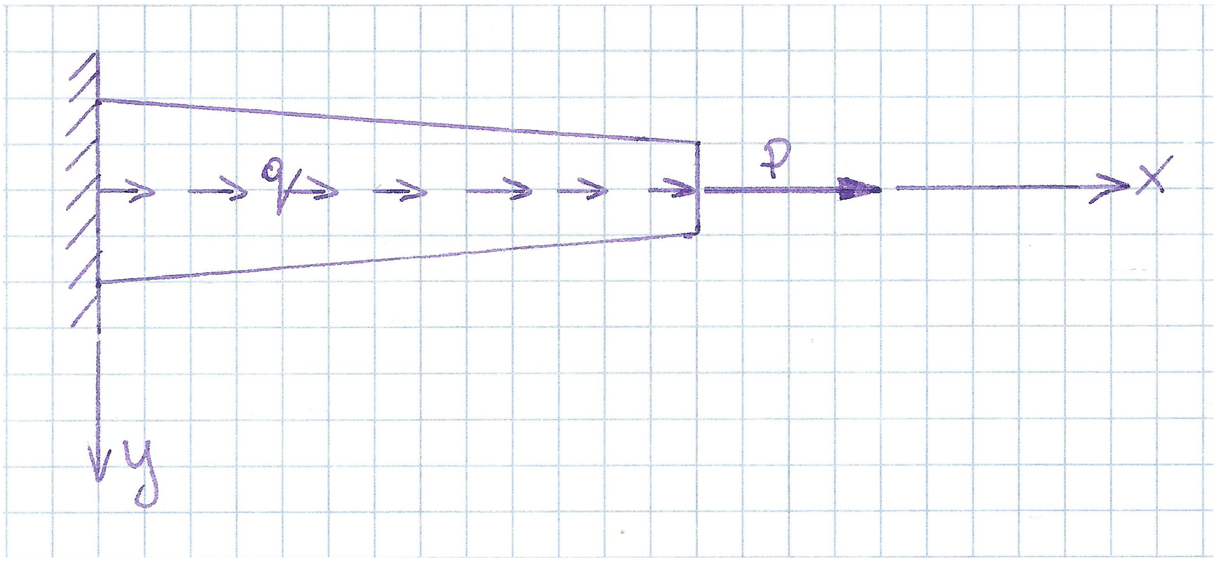
Teoria sprężystości i plastyczności - arkusz IX

Korzystając z wiadomości z wykładu oraz dołączonego rozwiązanego przykładowego zadania, wykorzystując pakiet MAPLE, starannie opracuj poniższe zadanie.

Zadanie

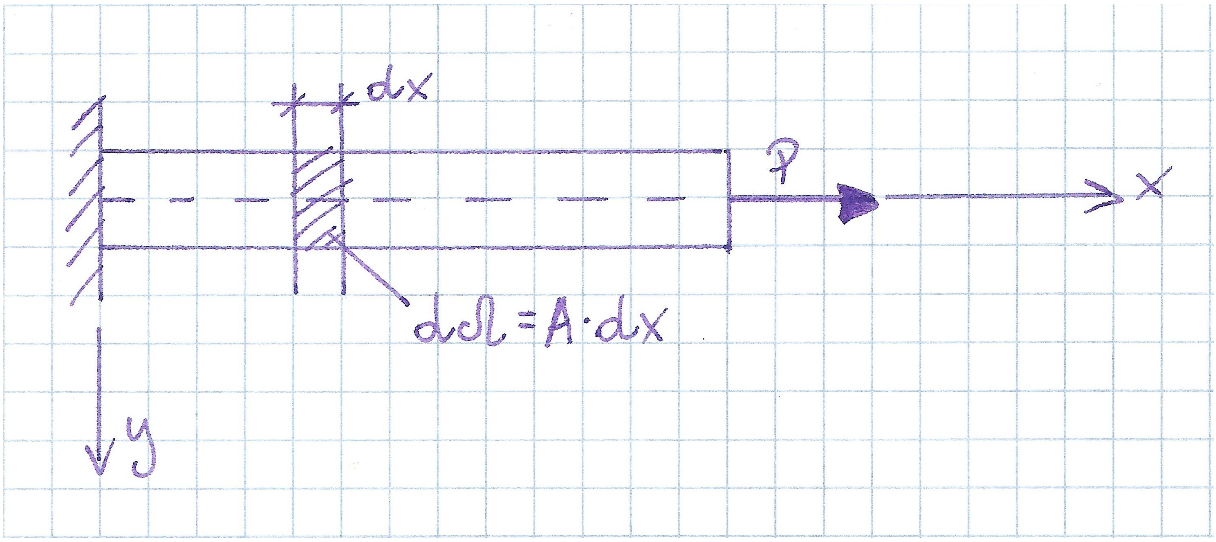
Dla przedstawionego układu, korzystając z twierdzenia o minimum energii potencjalnej i przyjmując funkcję przemieszczeń postaci $u(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ oblicz całkowite wydłużenie(skrócenie) wspornika. Porównaj je z wydłużeniem(skróceniem) otrzymanym z rozwiązania dokładnego znanego z wytrzymałości materiałów.

Przyjmij funkcję przekroju elementu postaci: $A(x) = A_0(2 - \frac{x}{L})$ oraz $E = 1$, $P = -3$, $q = 10$, $A_0 = 1$ i $L = 1$.



Zadanie przykładowe z rozwiązaniem

Dla pręta rozciąganego osiowo siłą P podać wyrażenie na energię potencjalną. Pokazać, że osiąga ono minimum dla $u(x) = \frac{Px}{EA}$.



Zakładając przemieszczenia w postaci funkcji kwadratowej $u(x) = C_1x + C_2x^2$ widzimy, że spełnia ona warunek brzegowy. Otrzymujemy wówczas odkształcenia postaci

$$\varepsilon_{11} = C_1 + 2C_2x,$$

i naprężenia

$$\sigma_{11} = E(C_1 + 2C_2x).$$

Z uwagi na stały przekrój ($d\Omega = Adx$), brak obciążeń masowych ($b_i = 0$) oraz obciążenie na końcu wspornika ($\sigma_{11} = \frac{P}{A} = t_1$) funkcjonał energii potencjalnej ma postać

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Omega - \int_{S_\sigma} t_i u_i dS \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l E(C_1 + 2C_2x)^2 A dx - \int_A \frac{P}{A}(C_1 l + C_2 l^2) dA \\
&= \frac{1}{2}EA(C_1^2 l + 4C_1C_2\frac{1}{2}l^2 + 4C_2^2\frac{1}{3}l^3 - P(C_1 l + C_2 l^2).
\end{aligned}$$

Obliczając wariację $\frac{\partial \Pi}{\partial C_1}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial C_2}$ i wykorzystując twierdzenie o minimum energii potencjalnej obliczymy C_1 i C_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} &= \frac{1}{2}EA(2C_1 l + 2C_2 l^2) - Pl = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial C_2} &= \frac{1}{2}EA(2C_1 l^2 + \frac{8}{3}C_2 l^3) - Pl^2 = 0.
\end{aligned}$$

Stąd $C_1 = \frac{P}{EA}$, $C_2 = 0.\square$