Teoria sprężystości i plastyczności - arkusz II

Zadanie 1

Tensor naprężenia w punkcie P wynosi

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć wektor naprężenia w tym punkcie dla kierunku $\bar{\mu} = [\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$.

Zadanie 2

Stan naprężenia w punkcie określa tensor

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}.$$

Dobrać stałe a, b, c tak, aby wektor naprężenia na płaszczyźnie oktaedrycznej był równy zero.

Zadanie 3

W układzie współrzędnych $\{x_i\}$ tensor naprężenia wynosi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć składowe tensora w układzie $\{x_{i'}\}$, jeśli macierz transformacji ma postać

$$\alpha_{i'j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4

Pokazać, że macierz transformacji $\{x_i\}$ do $\{x_{i'}\}$

$$\alpha_{i'j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

przeprowadza tensor

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dany w układzie $\{x_i\}$ do postaci diagonalnej w układzie $\{x_{i'}\}$.

Zadanie 5

Dla tensora naprężenia w układzie $\{x_i\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

obliczyć niezmienniki, wyznaczyć wartości główne oraz obliczyć niezmienniki w układzie osi głównych.

Zadanie 6

Wyznaczyć wartości główne dla tensorów

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i pokazać, że ich kierunki główne pokrywają się. Uzasadnić.

Zadanie 7

Rozłożyć tensor naprężenia

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

na część kulistą i dewiator. Pokazać, że pierwszy niezmiennik dewiatora jest równy zero.

Zadanie 8

Stan naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka określony jest tensorem

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jaką postać powinny mieć siły masowe, aby równania równowagi słuszne były w dowolnym punkcie?

Zadanie 9

Stan naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka określony jest tensorem

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} x_1^2x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ & \frac{x_2^3-3x_2}{3} & 0 \\ & & 2x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Jaką postać powinny mieć siły masowe, aby równania równowagi słuszne były w dowolnym punkcie?

Zadanie 10

Określić siły masowe, które zapewniają równowagę podanych stanów naprężenia

a)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -2x_1^2 & -7+4x_1x_2+x_3 & 1+x_1-3x_2 \\ & 3x_1^2-2x_2^2-5x_3 & 0 \\ & & -5+x_1+3x_2+3x_3 \end{bmatrix},$$

b)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} x_1^2-2x_1x_2+3x_3 & -x_1x_2+x_2^2 & -x_1x_3 \\ & x_2^2 & -x_2x_3 \\ & & (x_1+x_2)x_3 \end{bmatrix},$$

c)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3x_1+5x_2 & 4x_1-3x_2 \\ 4x_1-3x_2 & 2x_1-4x_2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11

Określić dla jakich wartości c_1, c_2, c_3, c_4 podane składowe opisują pole naprężeń ciała bez obciążenia masowego

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} c_1x_1+c_2x_2+c_3x_1x_2 & -\frac{1}{2}c_3x_2^2-c_1x_2 \\ -\frac{1}{2}c_3x_2^2-c_1x_2 & c_4x_1+c_1x_2 \end{bmatrix}.$$