Tensor naprężenia i odkształcenia w płaskim stanie naprężenia ośrodków liniowo - sprężystych

Jak podano na wykładzie, z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że płaski stan naprężenia występuje w tarczy płaskiej obciążonej w swojej płaszczyźnie. Przyjmujemy wówczas występowanie tensora naprężenia, który ma następującą postać macierzową

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Związki fizyczne dla płaskiego stanu naprężenia możemy zapisać jako

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= 0 \\ \varepsilon_{zy} &= 0 \end{cases}$$

Tensor odkształcenia dla opisywanego stanu naprężenia ma postać

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

W płaskim stanie naprężenia tylko dwa z sześciu równań nierozdzielności muszą spełniać składowe stanu odkształcenia, a mianowicie równanie (1) i (6)

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = (-\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zy}}{\partial x})_{,z} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2}$$

Powyższe równania nierozdzielności mogą zostać zapisane w naprężeniach. Równanie (1) ma następującą formę

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0,$$

a równanie (2)

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$