

## I. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

## 1. Definicje

Równanie różniczkowe zwyczajne jest to równanie, które wyraża związek między funkcją  $y = f(x)$ , jej pochodnymi i zmienną niezależną  $x$ :

$$F(y, y', y'' \dots y^n, x) = 0.$$

Jeżeli najwyższy rząd pochodnej funkcji  $y$  jest  $n$ -ty, to równanie nazywamy  $n$ -tego rzędu.

Równanie różniczkowe cząstkowe jest to równanie, które wyraża związek między funkcją wielu zmiennych  $y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ , jej pochodnymi cząstkowymi i zmiennymi niezależnymi. Np. równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu dla funkcji dwóch zmiennych  $z = f(x, y)$  jest:

$$F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) = 0.$$

Rozwiązaniem albo całką zwyczajnego równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję  $f(x)$ , która spełnia to równanie.

Całką ogólną równania różniczkowego, zwyczajnego pierwszego rzędu nazywamy jednoparametrową rodzinę funkcji  $y = f(x, C)$ , która dla każdej wartości parametru  $C$  z pewnego przedziału spełnia równanie różniczkowe jako funkcja  $x$ . Parametr  $C$  nazywa się stałą całkowania.

Nadając parametrowi  $C$  szczególne wartości, otrzymamy tak zwane całki szczególne. Całki, których nie można otrzymać z całki ogólnej nazywamy osobliwymi.

Całką ogólną równania różniczkowego zwyczajnego, drugiego rzędu nazywamy dwuparametrową rodzinę funkcji  $y = f(x, C_1, C_2)$ , która dla każdego  $C_1$  i  $C_2$  z pewnego obszaru spełnia równanie różniczkowe jako funkcja  $x$ ;  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi całkowania\*. Podobne określenia można podać dla całek ogólnych równań różniczkowych wyższych rzędów.

\* Nadając parametrom  $C_1$  i  $C_2$  szczególne wartości, otrzymujemy całki szczególne. Całce szczególnej można nadziąć 2 warunki (początkowe lub brzegowe), np. możemy szukać krzywej całkującej, która przechodzi przez dany punkt i ma w tym punkcie określony kierunek stycznej.

## 2. Sposoby rozwiązywania niektórych równań różniczkowych

| Nr | TYP RÓWNANIA                                                | RÓWNANIE                                                                                    | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a. | Równania pierwszego rzędu                                   |                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 1  | Równanie o da-<br>jących się roz-<br>dzielić zmien-<br>nych | $\frac{F_1(x)}{F_2(y)} = \frac{dy}{dx},$ czyli<br>$F_1(x) dx = F_2(y) dy \dots$ $\dots (a)$ | Jeżeli równanie da się sprowadzić do postaci (a), to mówimy, że w równaniu da się przeprowadzić rozdział zmiennych. Całkę ogólną otrzymujemy przez całkowanie każdej strony równania:<br>$\int F_1(x) dx = \int F_2(y) dy + C.$                                                                                                        |
| 2  | Równanie jed-<br>norodne                                    | $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$                                                 | Rozwiązujemy przez podstawienie:<br>$u = \frac{y}{x} \text{ czyli } ux = y; \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$ Wtedy zmienne dadzą się rozdzielić:<br>$u + x \frac{du}{dx} = f(u); \quad f(u) - u = x \frac{du}{dx};$ $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$ Całka ogólna: $\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + \ln C = \ln Cx$ |

| Nr | TYP RÓWNANIA                | RÓWNANIE                                | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----|-----------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3  | Równanie liniowe niezupełne | $\frac{dy}{dx} + yF(x) = 0.$            | <p>Rozdzielamy zmienne i całkujemy każdą stronę równania:</p> $\frac{dy}{y} = -F(x) dx; \ln y = -\int F(x) dx + \ln C;$ $\ln \frac{y}{C} = -\int F(x) dx.$ <p>Całka ogólna: <math>y = Ce^{-\int F(x) dx} = \frac{C}{e^{\int F(x) dx}}.</math></p>                                                                                                                                                                                                                             |
| 4  | Równanie liniowe zupełne    | $\frac{dy}{dx} + yF_1(x) + F_2(x) = 0.$ | <p>1 metoda</p> <p>Zakładamy, że <math>y = uv</math>, gdzie <math>u</math> i <math>v</math> oznaczają dwie nowe funkcje zmiennej <math>x</math>; funkcjom tym można narzucić jeden warunek.</p> <p>Po podstawieniu</p> $y = uv \text{ i } \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \text{ do równania}$ <p>otrzymujemy:</p> $v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + uv F_1(x) + F_2(x) = v \frac{du}{dx} +$ $+ u \left[ \frac{dv}{dx} + v F_1(x) \right] + F_2(x) = 0.$ |

Równanie  
liniowe zupełne

Dobieramy  $v$ , tak aby  $\frac{dv}{dx} + vF_1(x) = 0$ , tzn.

$$v = e^{-\int F_1(x) dx}. \text{ Wówczas na } u \text{ mamy warunek:}$$

$$v \frac{du}{dx} + F_2(x) = 0, \text{ czyli } \frac{du}{dx} = -F_2(x)e^{\int F_1(x) dx}$$

zatem:

$$u = -\int F_2(x)e^{\int F_1(x) dx} dx + C.$$

Całka ogólna:

$$y = uv = e^{-\int F_1(x) dx} \left\{ C - \int F_2(x)e^{\int F_1(x) dx} dx \right\}.$$

2 metoda

Opieramy się na tym, że całka ogólna równania zupełnego równa się sumie jego całki szczególnej i całki ogólnej równania niezupełnego. Znajdujemy więc najpierw całkę ogólną równania niezupełnego wg nr 3:

$$y = Ce^{-\int F_1(x) dx},$$

a następnie na miejsce stałe  $C$  dobieramy tak funkcję  $C(x)$ , aby funkcja  $y = C(x)e^{-\int F_1(x) dx}$  spełniała równanie zupełne (metoda Lagrange'a uzmiennienia stałej całkowania).

| Nr | TYP RÓWNANIA            | RÓWNANIE                                             | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----|-------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5  | Równanie Bernouilli'ego | $\frac{dy}{dx} + yF_1(x) + y^n F_2(x) = 0.$          | <p>Podstawiamy <math>u = y^{-n+1}</math>; <math>\frac{du}{dx} = \frac{-n+1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx}</math>;</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{(-n+1)} \frac{du}{dx}, \text{ gdzie } u \text{ pewna nieznana funkcja } x.$ <p>Otrzymujemy:</p> $\frac{du}{dx} \cdot \frac{y^n}{(-n+1)} + yF_1(x) + y^n F_2(x) = 0;$ $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{(-n+1)} + y^{-n+1} F_1(x) + F_2(x) = 0;$ $\frac{du}{dx} + (-n+1) u F_1(x) + (-n+1) F_2(x) = 0.$ <p>Jest to równanie liniowe zupełne, którego rozwiązanie jest podane pod nr 4.</p> |
| 6  | Równanie Clairauta      | $y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$ | <p>Stosujemy metodę różniczkowania. Po zróżniczkowaniu stronami równania względem <math>x</math> otrzymamy:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Równanie Clairauta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[ x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \right] = 0.$$

Stąd:

$$\text{albo } \frac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad \text{czyli } \frac{dy}{dx} = C,$$

a po podstawieniu do równania wyjściowego otrzymujemy całkę ogólną tego równania:

$$y = xC + f(C) \text{ (jednoparametrowa rodzina prostych);}$$

$$\text{albo } x = -f'\left(\frac{dy}{dx}\right), \text{ w którym oznaczamy}$$

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ po podstawieniu zaś do równania wyjściowego}$$

otrzymujemy:

$$y = -pf'(p) + f(p), \text{ co łącznie z równaniem: } x = -f'(p)$$

przedstawia krzywą całkującą w postaci parametrycznej.

| Nr | TYP RÓWNANIA                                   | RÓWNANIE                                             | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |                                                |                                                      | Jest to tzw. całka osobliwa, przedstawiająca obwiednię rodziny poprzednio wyznaczonych prostych, czyli krzywą styczną do każdej prostej o równaniu:<br>$y = xC + f(C).$                                                                                                                     |
| b. | Równania drugiego rzędu                        |                                                      | Przez dwukrotne całkowanie otrzymujemy:                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 7. | Równanie nie zawierające $y$ i $\frac{dy}{dx}$ | $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$                           | $\frac{dy}{dx} = \int f(x) dx + C_1;$ $y = \int [\int f(x) dx] dx + C_1 x + C_2.$                                                                                                                                                                                                           |
| 8. | Równanie nie zawierające $y$                   | $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ | Podstawiając $\frac{dy}{dx} = p$ ; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$<br>( $p$ jest funkcją $x$ ) do równania otrzymujemy:<br>$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$<br>które jest równaniem pierwszego rzędu. Jego rozwiązanie:<br>$p = F(x, C_1),$<br>wobec czego:<br>$y = \int F(x, C_1) dx + C_2.$ |

|     |                                                        |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9.  | Równanie nie zawierające $x$                           | $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y \frac{dy}{dx}\right)$ | Podstawiając $\frac{dy}{dx} = p$ , gdzie $p$ uważamy za funkcję $y$ , otrzymujemy na drugą pochodną $y$ wyrażenie:<br>$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$<br>Po podstawieniu do równania otrzymujemy:<br>$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$<br>równanie pierwszego rzędu, którego rozwiązanie:<br>$p = F(y, C_1),$<br>wobec czego:<br>$\frac{dy}{dx} = F(y, C_1); \quad dx = \frac{dy}{F(y, C_1)};$ $x = \int \frac{dy}{F(y, C_1)} + C_2.$ |
| 10. | Równanie liniowe niezupełne ze stałymi współczynnikami | $\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$      | Podstawiając do równania $y = e^{rx}$ otrzymamy:<br>$\frac{dy}{dx} = re^{rx}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 e^{rx};$ $r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

| Nr | TYP RÓWNANIA                                           | RÓWNANIE | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----|--------------------------------------------------------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Równanie liniowe niezupełne ze stałymi współczynnikami |          | <p>Zatem funkcja <math>y = e^{rx}</math> będzie całką równania, jeżeli <math>r</math> będzie spełniało tzw. równanie charakterystyczne danego równania różniczkowego:</p> $r^2 + ar + b = 0.$ <p>Jego rozwiązania są następujące:</p> $r_{1,2} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$ <p>a) Jeżeli <math>a^2 &gt; 4b</math>, to <math>r_1</math> i <math>r_2</math> są liczbami rzeczywistymi i wówczas całką ogólną równania jest:</p> $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$ <p>b) Jeżeli <math>a^2 = 4b</math>, to <math>r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}</math> i wówczas całką ogólną równania jest:</p> $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{a}{2} x}.$ <p>c) Jeżeli <math>a^2 &lt; 4b</math>, to <math>r_1</math> i <math>r_2</math> są liczbami zespolonymi sprzężonymi: <math>r_1 = \alpha + \beta \cdot i</math>, <math>r_2 = \alpha - \beta \cdot i</math>, gdzie <math>\alpha = -\frac{a}{2}</math>, <math>\beta = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}</math> i wówczas całką równania jest:</p> $y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}).$ |

|     |                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | <p>Szczególny przypadek (ważny przy badaniu wyboczenia):</p> <p>Równanie nie zawiera pochodnej <math>\frac{dy}{dx}</math></p> $\frac{d^2 y}{dx^2} \pm b^2 y = 0.$ | <p>Stosując wzory rozdziału IV, E (str. 117):</p> $e^{\beta i x} = \cos \beta x + i \sin \beta x,$ $e^{-\beta i x} = \cos \beta x - i \sin \beta x,$ <p>możemy całkę ogólną wyrazić w postaci rzeczywistej:</p> $y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$ <p>gdzie <math>A</math> i <math>B</math> nowe stałe całkowania, albo też w postaci:</p> $y = C e^{\alpha x} \sin (\beta x + \varphi),$ <p>gdzie <math>C</math> i <math>\varphi</math> również nowe stałe całkowania.<br/>Całka ogólna dla:</p> <p>a) <math>\frac{d^2 y}{dx^2} + b^2 y = 0</math>: <math>y = C_1 \sin bx + C_2 \cos bx</math><br/>lub <math>y = C \sin (bx + \varphi)</math>;</p> <p>b) <math>\frac{d^2 y}{dx^2} - b^2 y = 0</math>: <math>y = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}.</math></p> |
| 11. | <p>Równanie liniowe zupełne ze stałymi współczynnikami</p> $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = F(x).$                                                    | <p>Przy rozwiązywaniu opieramy się na tym, że całka ogólna równania zupełnego równa się sumie jego całki szczególnej i całki ogólnej równania niezupełnego tzn.:</p> $y = y_1 + y_2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

| Nr | TYP RÓWNANIA                                        | RÓWNANIE | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----|-----------------------------------------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Równanie liniowe zupełne ze stałymi współczynnikami |          | <p>gdzie: <math>y_1</math> — całka szczególna równania:</p> $\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a \frac{dy_1}{dx} + by_1 = F(x), \text{ zaś}$ <p><math>y_2</math> — całka ogólna równania:</p> $\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a \frac{dy_2}{dx} + by_2 = 0$ <p>(rozwiązanie pod numerem 10)</p> <p>Dla niektórych typów funkcji <math>F(x)</math> całkę szczególną równania zupełnego można znaleźć bezpośrednio:</p> <p>a) Gdy <math>F(x)</math> wielomian <math>n</math>-tego stopnia, to jeżeli:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>b \neq 0</math>, <math>y_1</math> jest wielom. <math>n</math>-tego stopnia</li> <li>(2) <math>b = 0</math>, <math>a \neq 0</math> <math>y_1</math> „ <math>(n + 1)</math> „</li> <li>(3) <math>b = 0</math>, <math>a = 0</math> <math>y_1</math> „ <math>(n + 2)</math> „</li> </ol> <p>Współczynniki wielomianu <math>y_1</math> wyznacza się w ten sposób, że <math>y_1</math> i pochodne <math>y_1</math> podstawia się do równania wyjściowego, które musi być wówczas spełnione, czyli strona lewa równania musi być tożsamościowo równa <math>F(x)</math>. Otrzymuje się stąd szereg warunków na współczynniki wielomianu <math>y_1</math>.</p> |

Równanie liniowe zupełne ze stałymi współczynnikami

b) Gdy  $F(x) = pe^{kx}$ , gdzie  $p$  i  $k$  są stałe, to:

- (1) jeżeli  $k = 0$ , mamy przypadek poprzedni przy  $n = 0$ ;

(2) jeżeli  $k \neq 0$  i  $k$  nie jest rozwiązaniem równania charakterystycznego:

$$y_1 = \frac{p}{k^2 + ak + b} e^{kx};$$

(3) jeżeli  $k \neq 0$  i  $k$  jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego:

$$y_1 = \frac{p}{2k + a} x e^{kx};$$

(4) jeżeli  $k \neq 0$  i  $k$  jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego:

$$y_1 = \frac{p}{2} x^2 e^{kx}.$$

c) Gdy  $F(x) = p \sin vx + q \cos vx$ , to:

(1) jeżeli jednocześnie nie zachodzą zależności

$$b = v^2 \text{ i } a = 0, \text{ to:}$$

$y_1 = m \sin vx + n \cos vx$ , gdzie  $m$  i  $n$  wyznacza się z układu równań:

$$\begin{aligned} (b - v^2) m - avn &= p, \\ avm + (b - v^2) n &= q; \end{aligned}$$

| Nr | TYP RÓWNANIA                                                                                                                                                         | RÓWNANIE                            | SPOSÓB ROZWIĄZANIA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |                                                                                                                                                                      |                                     | <p>(2) jeżeli jednocześnie <math>b = v^2</math> i <math>a = 0</math>, to:</p> $y_1 = x (m \sin vx + n \cos vx),$ <p>gdzie <math>m = \frac{q}{2v}</math> i <math>n = -\frac{p}{2v}</math>.</p> <p>Całka ogólna jest sumą całki szczególnej równania zupełnego <math>\frac{d^2y}{dx^2} \pm b^2y = F(x)</math>, którą wyznaczamy wg podanych wskazówek i całki ogólnej równania niezupełnego <math>\frac{d^2y}{dx^2} \pm b^2y = 0</math>, którą podano pod nr 10 (przypadek szczególny).</p> |
|    | <p>Szczególny przypadek (ważny przy badaniu ugięcia belek jednocześnie zginanych i ściskanych):</p> <p>Równanie nie zawiera pochodnej <math>\frac{dy}{dx}</math></p> | $\frac{d^2y}{dx^2} \pm b^2y = F(x)$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

