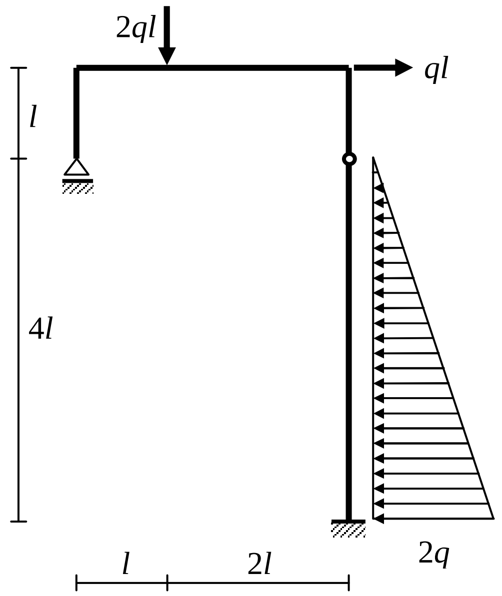
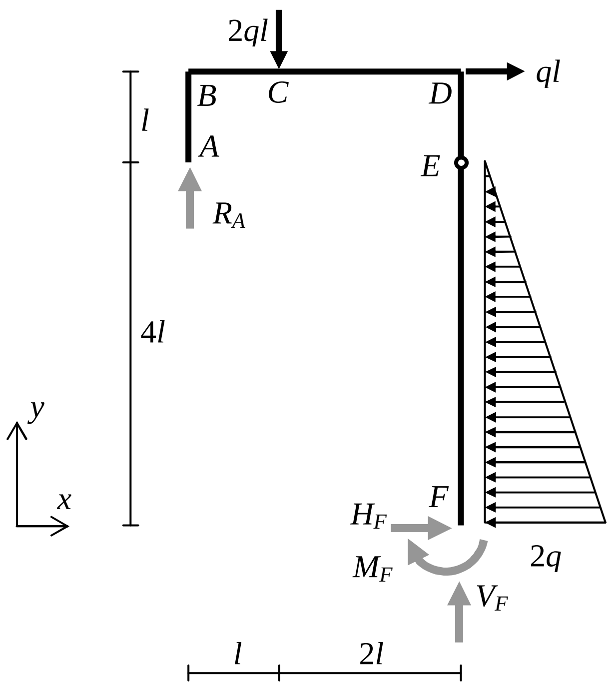
Przykład 8.8. Rama obciążona obciążeniem ciągłym o rozkładzie liniowym

Polecenie: Dla poniższej ramy sporządzić wykresy sił przekrojowych.



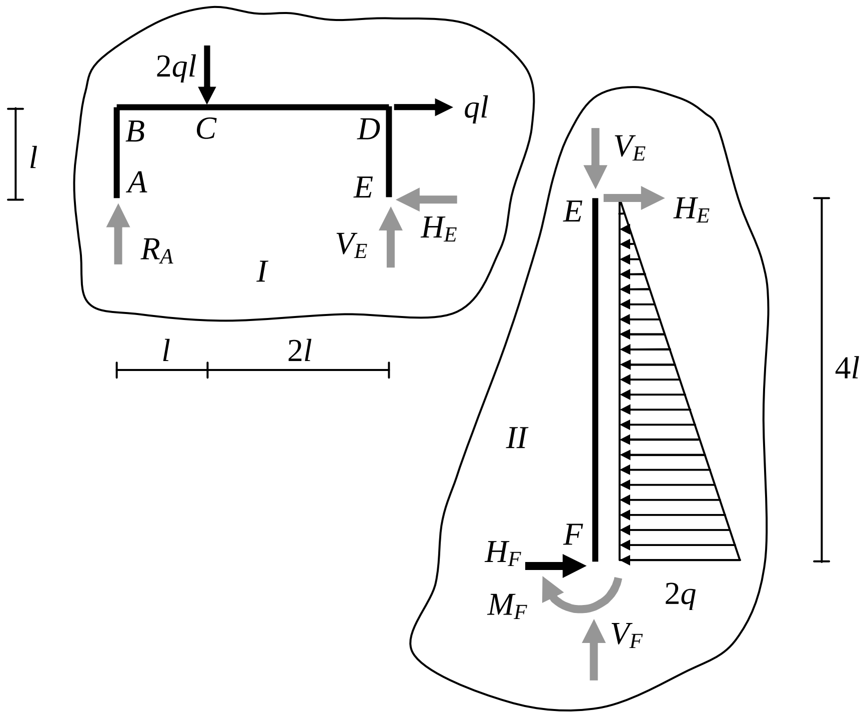
Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory *A* i *F*, przegub *E* oraz węzły sztywne *B* i *D*. Oznaczamy też punkt przyłożenia siły pionowej *C*. W układzie oswobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory sił o nieznanej wartości oznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu wartości reakcji zmieniamy kolor wektora na czarny.



Z równania rzutów sił na oś poziomą wyznaczymy składową poziomą reakcji podpory *F*.

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_F + ql - \frac{1}{2}\cdot 2q \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = 4ql - ql = 3ql \quad \Rightarrow \quad H_F = 3ql$$

W celu wyznaczenia pozostałych reakcji i oddziaływań podzielimy układ na podukłady.



$$\sum_i M_{iE}^I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -R_A \cdot 3l + 2ql \cdot 2l - ql \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{1}{3l} \cdot 3ql^2 = ql \quad \Rightarrow \quad R_A = ql$$

$$\sum_i P_{ix}^I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -H_E + ql = 0 \quad \Rightarrow \quad H_E = ql$$

$$\sum_i P_{iy}^I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A + V_E - 2ql = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E = 2ql - R_A = 2ql - ql = ql \quad \Rightarrow \quad V_E = ql$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A + V_F - 2ql = 0 \quad \Rightarrow \quad V_F = 2ql - R_A = 2ql - ql = ql \quad \Rightarrow \quad V_F = ql$$

$$\sum_i M_{iF}^{II} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -M_F - H_E \cdot 4l + \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot 4l \cdot \frac{1}{3} \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad M_F = \frac{16}{3} ql^2 - H_E \cdot 4l =$$

$$= \frac{16}{3} ql^2 - ql \cdot 4l = \frac{4}{3} ql^2 \quad \Rightarrow \quad M_F = \frac{4}{3} ql^2$$

<u>Przedział *A-B*</u>

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe ($q_n = q_s = 0$). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Reakcja podpory *A* ma kierunek pionowy i zwrot siły ściskającej. Linia działania reakcji R_A jest równoległa do osi pręta *AB*. Wynika stąd, że w każdym przekroju rozważanego przedziału siła tnąca i moment gnący mają zerowe wartości. Pręt *AB* jest wyłącznie ściskany.

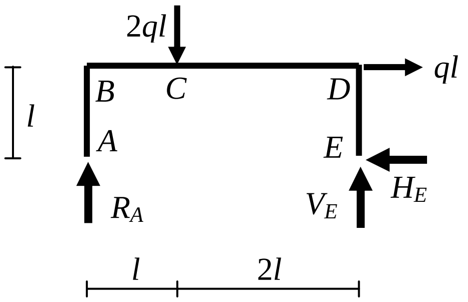
$$N_{AB} = -R_A = -ql \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = -ql \qquad\qquad N_{BA} = N_{AB} = -ql \quad \Rightarrow \quad N_{BA} = -ql$$

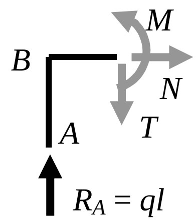
$T_{AB} = 0 \qquad T_{BA} = T_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BA} = 0$

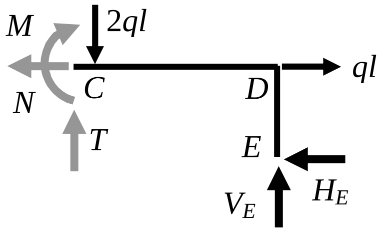
$M_{AB} = 0 \qquad M_{BA} = 0$

Przedział *B-C*

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe (q_n = q_s = 0). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Reakcja podpory *A* ma kierunek pionowy. Jej rzut na oś pręta *BD* jest równy zero, czyli siła normalna jest zerowa. Siła tnąca jest stała i równa reakcji $R_A = ql$. Wykres momentu gnącego ma przebieg liniowy. W punkcie *B* rzędna na wykresie momentu jest równa zero, natomiast w punkcie *C* wartość rzędnej będzie równa momentowi reakcji podpory *A* na ramieniu *l*. Momenty gnące w przedziale *B-C* powodują rozciąganie dolnych włókien.







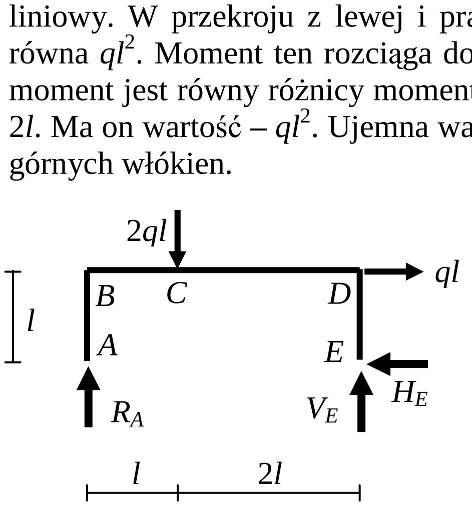
$N_{BC} = 0 \qquad N_{CB} = N_{BC} = 0$

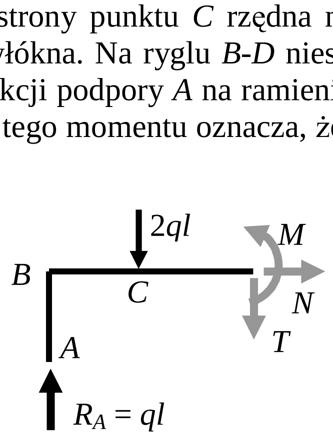
$T_{BC} = ql \qquad T_{CB} = T_{BC} = ql$

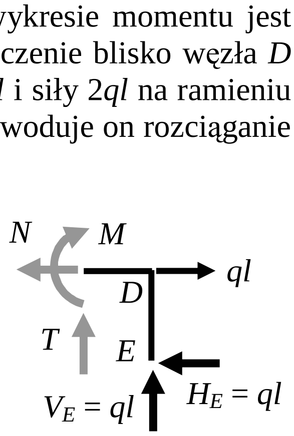
$M_{BC} = 0 \qquad M_{CB} = R_A \cdot l = ql^2$

Przedział *C-D*

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe (q_n = q_s = 0). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Reakcja podpory *A* oraz siła 2*ql* mają kierunek pionowy. Ich rzut na oś pręta *BD* jest równy zero, czyli siła normalna jest zerowa. Siła tnąca jest stała i równa różnicy reakcji $R_A = ql$ i siły pionowej 2*ql*. Wykres momentu gnącego ma przebieg liniowy. W przekroju z lewej i prawej strony punktu *C* rzędna na wykresie momentu jest równa ql^2. Moment ten rozciąga dolne włókna. Na ryglu *B-D* nieskończenie blisko węzła *D* moment jest równy różnicy momentu reakcji podpory *A* na ramieniu 3*l* i siły 2*ql* na ramieniu 2*l*. Ma on wartość – ql^2. Ujemna wartość tego momentu oznacza, że powoduje on rozciąganie górnych włókien.







$N_{CD} = 0 \qquad N_{DC} = N_{CD} = 0$

$$T_{CD} = -ql \qquad T_{DC} = T_{CD} = -ql$$

$$M_{CD} = ql^2 \qquad M_{DC} = ql \cdot 3l - 2ql \cdot 2l = -ql^2$$

<u>Przedział *D-E*</u>

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe (q_n = q_s = 0). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Składowa pionowa oddziaływania w przegubie *E* ma wartość równą *ql* i zwrot ściskającej siły normalnej. Składowa pozioma oddziaływania w przegubie *E* ma wartość równą *ql* i zwrot dodatniej siły tnącej. Wykres momentu gnącego ma przebieg liniowy. W punkcie *E* rzędna na wykresie momentu jest równa zero, natomiast w przekroju poprzecznym nieskończenie blisko węzła sztywnego *D* wartość rzędnej jest równa momentowi składowej poziomej przegubu *E* na ramieniu *l*. Momenty gnące w przedziale *D-E* powodują rozciąganie prawych włókien.

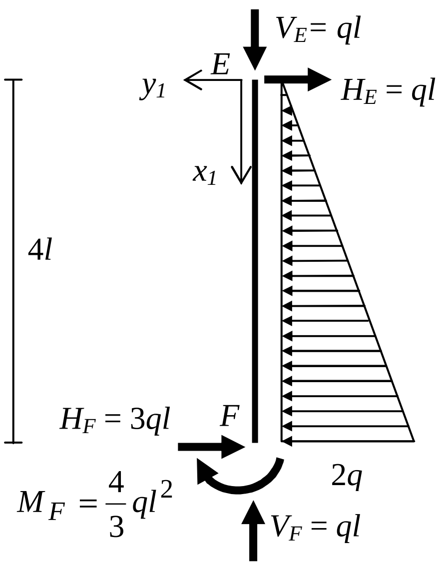
$$N_{ED} = -V_E = -ql \qquad N_{DE} = N_{ED} = -ql$$

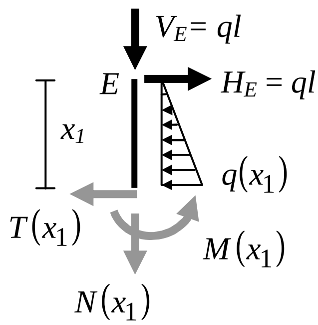
$$T_{ED} = H_E = ql \qquad T_{DE} = T_{ED} = ql$$

$$M_{ED} = 0 \qquad M_{DE} = H_E \cdot l = ql \cdot l = ql^2$$

<u>Przedział *E-F*</u>

W rozważanym przedziale występuje obciążenie ciągłe normalne opisane funkcją liniową, którą możemy wyznaczyć z proporcji. Obciążenie styczne ma wartość zero (q_s = 0). W przedziale tym wyznaczamy funkcje sił przekrojowych. W tym celu wprowadzimy układ lokalny x_1y_1.





$$\frac{q(x_1)}{x_1} = \frac{2q}{4l} \quad \Rightarrow \quad q(x_1) = \frac{q\,x_1}{2\,l}$$

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N(x_1) + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x_1) = -V_E = -ql \quad \Rightarrow \quad N(x_1) = -ql$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x_1) - H_E + \frac{1}{2} \cdot \frac{q\,x_1}{2\,l} \cdot x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x_1) = H_E - \frac{1}{4} \cdot \frac{q x_1^{\,2}}{l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T(x_1) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q{x_1}^2}{l}$$

$$\sum_i M_{i\alpha-\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(x_1) - H_E \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{q\,x_1}{2l} \cdot x_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M(x_1) = H_E \cdot x_1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{q{x_1}^3}{l} = qlx_1 - \frac{1}{12} \frac{q{x_1}^3}{l} \quad \Rightarrow \quad M(x_1) = qlx_1 - \frac{1}{12} \frac{q{x_1}^3}{l}$$

Funkcja siły tnącej jest funkcją kwadratową. Jej wykres jest parabolą. Wyznaczamy trzy rzędne tego wykresu.

$$T(x_1 = 0) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot 0^2}{l} = ql$$

$$T(x_1 = 4l) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot (4l)^2}{l} = -3ql$$

Skoro $T(x_1 = 0) > 0$, natomiast $T(x_1 = 4l) < 0$, to w rozpatrywanym przedziale występuje przekrój, w którym siła tnąca zeruje się. Wyznaczamy tę współrzędną.

$$T(x_1) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q{x_1}^2}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4ql^2 = q{x_1}^2 \quad \Rightarrow \quad {x_1}^2 = 4l^2 \quad \Rightarrow x_{1_{1,2}} = \pm 2l$$

Pierwiastek ujemny znajduje się poza przedziałem $x_1 \in \langle 0, 4l \rangle$

$$T(x_1 = 2l) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q(2l)^2}{l} = 0$$

Zauważmy, że na początku przedziału *E-F* wartość natężenia obciążenia ciągłego normalnego jest równa zero. W przekroju tym na wykresie siły tnącej występuje ekstremum.

$$q_n(x_1) = \frac{1}{2} \frac{q\,x_1}{l} \quad \Rightarrow \quad q_n(x_1 = 0) = \frac{1}{2} \frac{q \cdot 0}{l} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}T(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = -q_n(x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T(x_1 = 0)}{\mathrm{d}x_1} = -q_n(x_1 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T(x_1 = 0)}{\mathrm{d}x_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{ekstr.}} = T(x_1 = 0) = ql - \frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot 0^2}{l} = ql \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ekstr.}} = ql$$

Funkcja momentu gnącego jest funkcją sześcienną. W celu wykonania jej wykresu wyznaczamy rzędne na początku i końcu przedziału oraz w przekroju, w którym zeruje się siła tnąca.

$$M(x_1 = 0) = ql \cdot 0 - \frac{1}{12} \frac{q \cdot 0^3}{l} = 0$$

$$M_{\text{ekstr.}} = M(x_1 = 2l) = ql \cdot 2l - \frac{1}{12}\frac{q \cdot (2l)^3}{l} = \frac{4}{3} ql^2$$

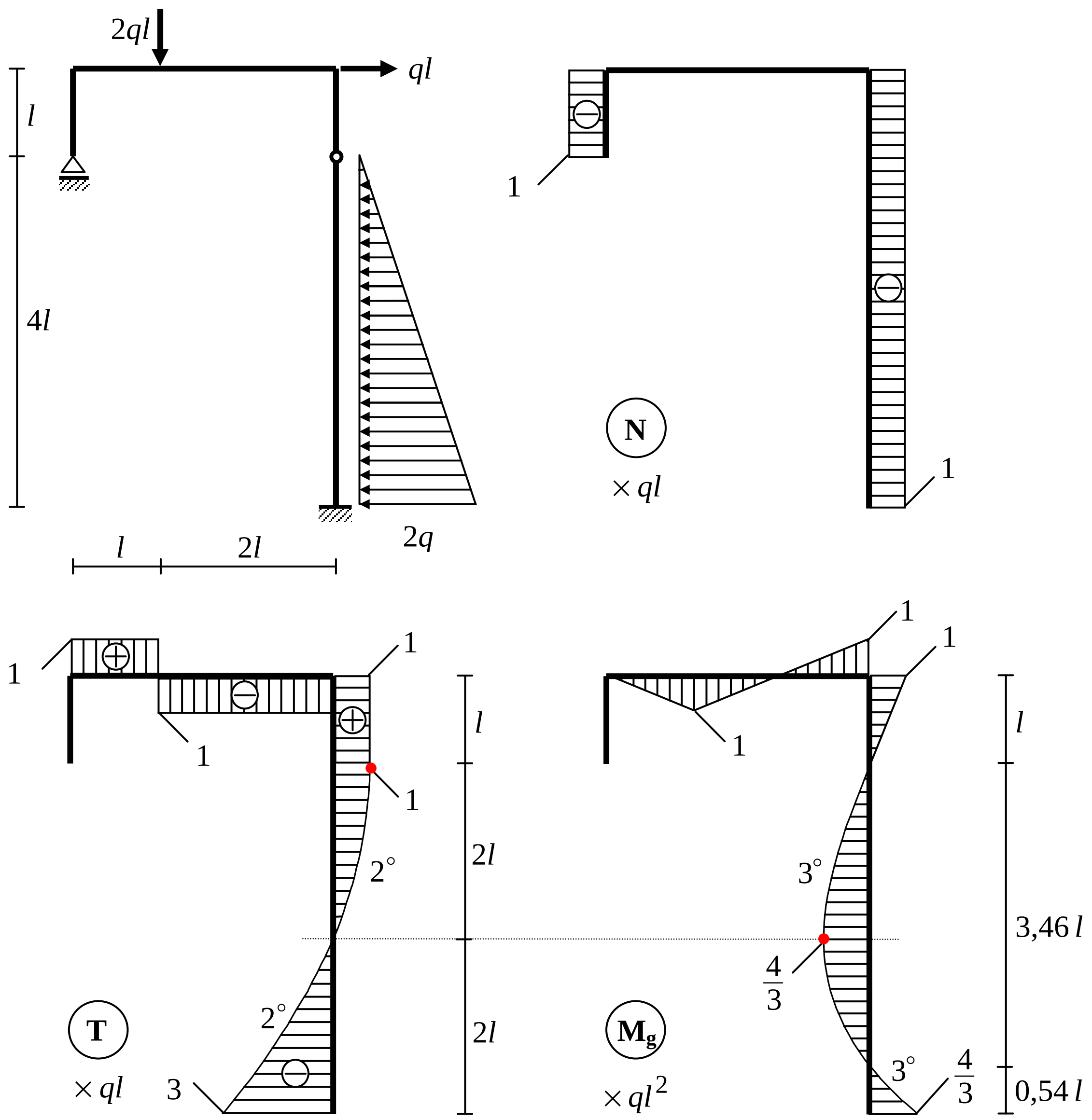
$$M(x_1 = 4l) = ql \cdot 4l - \frac{1}{12}\frac{q \cdot (4l)^3}{l} = -\frac{4}{3} ql^2$$

Znamy trzy rzędne wykresu momentu. Jedna z nich stanowi ekstremum. Oznacza to, że styczna do wykresu w przekroju o współrzędnej $x_1 = 2l$ jest równoległa do osi x_1. Możemy też wyznaczyć miejsce zerowe na wykresie momentu gnącego. O tym, że ono występuje, świadczy zmiana znaku wartości momentu: $M(x_1 = 2l) > 0$, $M(x_1 = 4l) < 0$.

$$M(x_1) = qlx_1 - \frac{1}{12}\frac{qx_1^{\,3}}{l} = qx_1 \cdot \left(l - \frac{1}{12}\frac{x_1^{\,2}}{l} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1_1} = -2\sqrt{3}\, l,\; x_{1_2} = 0,\; x_{1_3} = 2\sqrt{3} l$$

Pierwiastek $x_{1_3} = 2\sqrt{3}\, l \approx 3{,}46\, l$ należy do rozpatrywanego przedziału $x_{1_3} \in \langle 2l, 4l \rangle$.

Wykresy sił przekrojowych



Ekstrema na wykresach siły tnącej i momentu gnącego zaznaczone są kolorem czerwonym. Sprawdzimy jeszcze, czy spełnione są zależności różniczkowe w przedziale *E*-*F*. Funkcje obciążenia ciągłego stycznego i normalnego oraz sił przekrojowych znajdują się poniżej.

$$q_s(x_1) = 0$$

$$q_n(x_1) = \frac{1}{2}\frac{q\,x_1}{l}$$

$$N(x_1) = -ql$$

$$T(x_1) = ql - \frac{1}{4}\cdot\frac{qx_1^{\,2}}{l}$$

$$M(x_1) = qlx_1 - \frac{1}{12}\frac{qx_1^{\,3}}{l}$$

Zależności różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}N(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}(-ql)}{\mathrm{d}x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\mathrm{d}N(x_1)}{\mathrm{d}x_1} \equiv -q_s(x_1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}T(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}\left(ql - \frac{1}{4}\cdot\frac{qx_1^{\,2}}{l}\right)}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{1}{4}\cdot 2\frac{qx_1}{l} = -\frac{1}{2}\frac{q\,x_1}{l} \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\mathrm{d}T(x_1)}{\mathrm{d}x_1} \equiv -q_n(x_1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}\left(qlx_1 - \frac{1}{12}\cdot\frac{qx_1^{\,3}}{l}\right)}{\mathrm{d}x_1} = ql - \frac{1}{12}\cdot 3\frac{qx_1^{\,2}}{l} = ql - \frac{1}{4}\frac{qx_1^{\,2}}{l} \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\mathrm{d}M(x_1)}{\mathrm{d}x_1} \equiv T(x_1)}$$

Zależności spełnione są tożsamościowo.