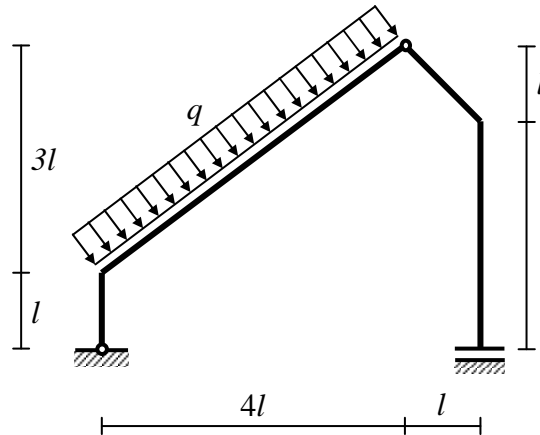
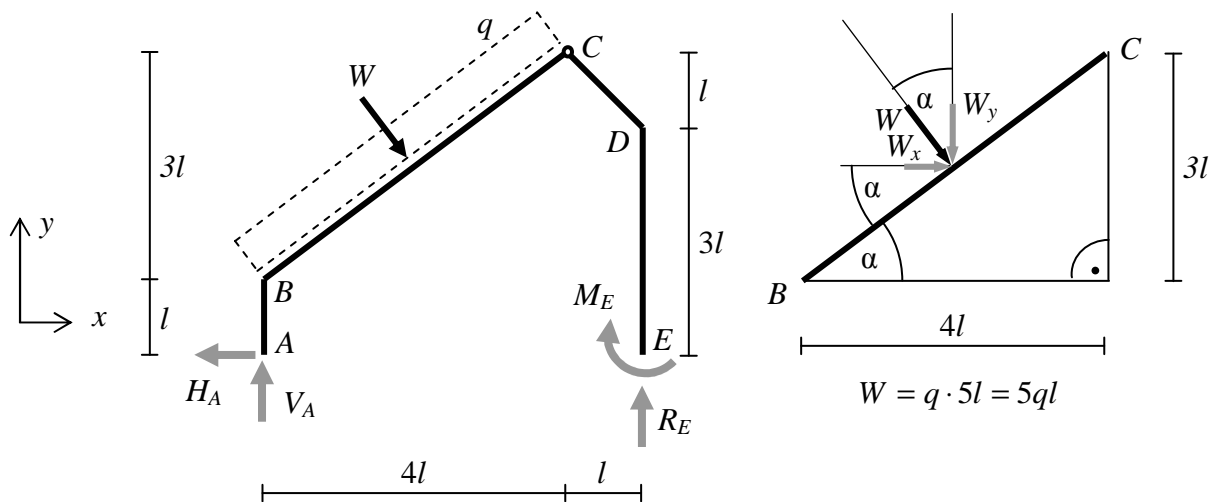


### Przykład 8.5. Rama obciążona obciążeniem ciągłym (typ III)

Polecenie: Dla poniższej ramy sporządzić wykresy sił przekrojowych.



Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory  $A$  i  $E$ , przegub  $C$  oraz węzły sztywne  $B$  i  $D$ . W układzie oswoobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory nieznanymi reakcji, oddziaływań lub sił przekrojowych zaznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu ich wartości zmieniamy kolor na czarny. Do obliczenia reakcji obciążenie ciągłe zastępujemy wypadkową.



Obliczamy długość pręta  $BC$  oraz wartości funkcji sinus i cosinus kąta  $\alpha$ .

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(4l)^2 + (3l)^2} = 5l \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

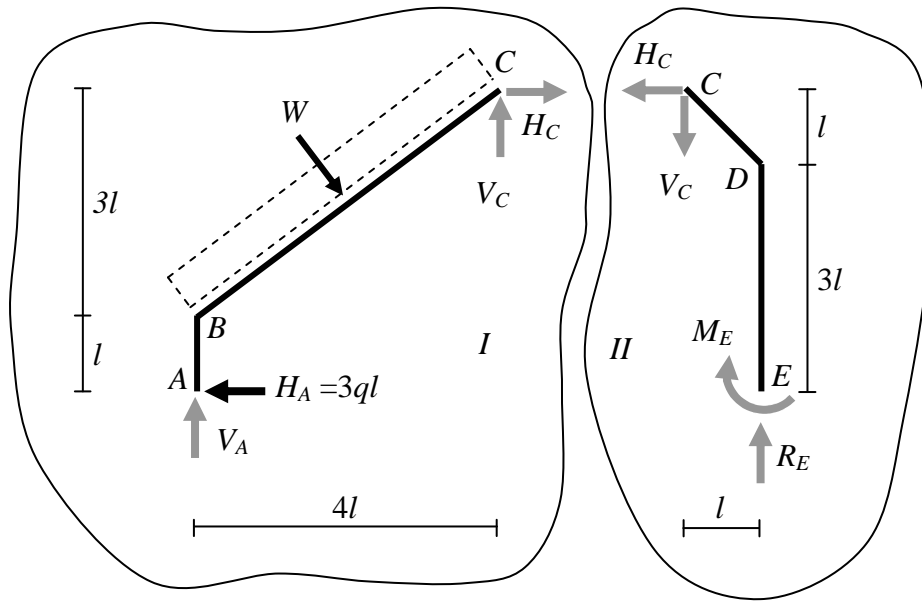
Wyznaczamy składowe wypadkowej

$$W_x = W \cdot \sin\alpha = 5ql \cdot \frac{3}{5} = 3ql, \quad W_y = W \cdot \cos\alpha = 5ql \cdot \frac{4}{5} = 4ql$$

Wyznaczamy reakcje podporowe

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Leftrightarrow -H_A + W_x = 0 \Rightarrow H_A = W_x \Rightarrow H_A = 3ql$$

W celu obliczenia wartości pozostałych reakcji i oddziaływań w przegubie C podzielimy układ na podukłady I i II.



$$\sum_i M_{iC}^I = 0 \Leftrightarrow -V_A \cdot 4l - H_A \cdot 4l + W \cdot \frac{1}{2} \cdot 5l = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 4l - 3ql \cdot 4l + 5ql \cdot \frac{5}{2}l =$$

$$= -V_A \cdot 4l - 12ql^2 + \frac{25}{2}ql^2 = -V_A \cdot 4l + \frac{1}{2}ql^2 = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{8}ql$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \Leftrightarrow R_E + V_A - W_y = 0 \Rightarrow R_E = W_y - V_A \Rightarrow R_E = 3ql - \frac{1}{8}ql = \frac{31}{8}ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_E = \frac{31}{8}ql$$

$$\sum_i M_{iC}^{II} = 0 \Leftrightarrow -M_E + R_E \cdot l = 0 \Rightarrow M_E = R_E \cdot l = \frac{31}{8}ql \cdot l \Rightarrow M_E = \frac{31}{8}ql^2$$

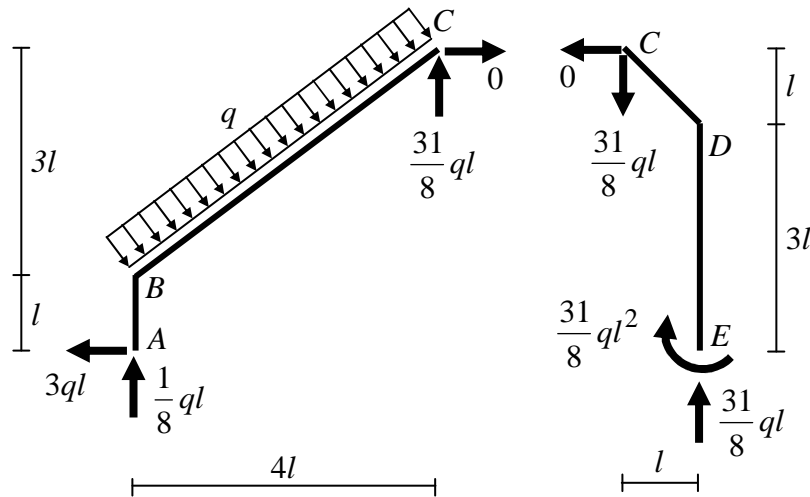
$$\sum_i P_{iy}^{II} = 0 \Leftrightarrow -V_C + R_E = 0 \Rightarrow V_C = R_E \Rightarrow V_C = \frac{31}{8}ql$$

$$\sum_i P_{ix}^{II} = 0 \Leftrightarrow -H_C = 0 \Rightarrow H_C = 0$$

W celu sprawdzenia poprawności wartości wyznaczonych reakcji zapisujemy równanie sumy momentów względem punktu A.

$$\sum_i M_{iA} = R_E \cdot 5l - M_E - W_x \cdot \left( l + \frac{1}{2} \cdot 3l \right) - W_y \cdot \frac{1}{2} \cdot 4l =$$

$$= \frac{31}{8}ql \cdot 5l - \frac{31}{8}ql^2 - 3ql \cdot \left( l + \frac{1}{2} \cdot 3l \right) - 4ql \cdot \frac{1}{2} \cdot 4l = \left( \frac{31}{8} \cdot (5-1) - \frac{15}{2} - 8 \right) \cdot ql^2 \equiv 0$$



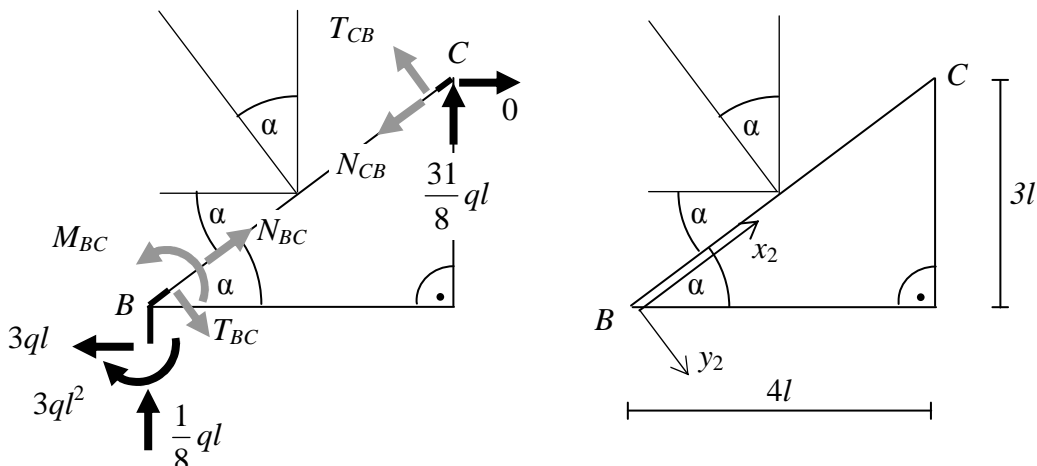
### Przedział A-B

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe ( $q_n = q_s = 0$ ). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Składowa pionowa reakcji podpory A ma zwrot siły ściskającej, a pozioma ma zwrot dodatniej siły tnącej. Uwzględniając, iż siła tnąca ma stałą wartość, możemy stwierdzić, że wykres momentu gnącego ma przebieg liniowy. W punkcie A wartość rzędnej na wykresie momentu jest zerowa, natomiast w punkcie B rzędna jest równa momentowi składowej poziomej na ramieniu  $l$ . Moment  $M_{BA}$  powoduje rozciąganie prawych włókien.

$$\begin{aligned}
 N_{AB} = -V_A &\Rightarrow N_{AB} = -\frac{1}{8}ql & N_{BA} = N_{AB} &\Rightarrow N_{BA} = -\frac{1}{8}ql \\
 T_{AB} = H_A &\Rightarrow T_{AB} = 3ql & T_{BA} = T_{AB} &\Rightarrow T_{BA} = 3ql \\
 M_{AB} = 0 & & M_{BA} = H_A \cdot l = 3ql \cdot l &\Rightarrow M_{BA} = 3ql^2
 \end{aligned}$$

### Przedział B-C

W rozważanym przedziale występuje obciążenie ciągłe normalne o stałym natężeniu ( $q_n = q$ ), natomiast nie działa obciążenie ciągłe styczne ( $q_s = 0$ ). Siła normalna ma stałą wartość. Siła tnąca opisana jest funkcją liniową. W celu narysowania wykresu siły tnącej wystarczy obliczyć rzędne w dwóch przekrojach. Moment gnący opisany jest funkcją kwadratową. Wykres momentu ma przebieg paraboliczny.



Z równań równowagi wyznaczamy wartości sił przekrojowych wskazanych na powyższym rysunku.

$$\sum_i P_{ix_2}^B = 0 \Leftrightarrow N_{BC} - 3ql \cdot \cos\alpha + \frac{1}{8}ql \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{BC} - 3ql \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{8}ql \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{BC} = 3ql \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{8}ql \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{96}{40} - \frac{3}{40}\right)ql = \frac{93}{40}ql \Rightarrow N_{BC} = \frac{93}{40}ql$$

$$\sum_i P_{iy_2}^B = 0 \Leftrightarrow T_{BC} - 3ql \cdot \sin\alpha - \frac{1}{8}ql \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow T_{BC} - 3ql \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{8}ql \cdot \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 3ql \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{8}ql \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{18}{10} + \frac{1}{10}\right)ql = \frac{19}{10}ql \Rightarrow T_{BC} = \frac{19}{10}ql$$

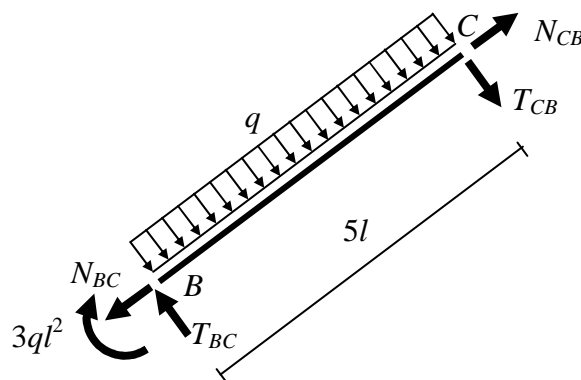
$$\sum_i M_i^B = 0 \Leftrightarrow M_{BC} - 3ql^2 = 0 \Rightarrow M_{BC} = 3ql^2$$

Wyznaczenie siły normalnej  $N_{CB}$  można pominąć, gdyż w przedziale  $B-C$  rzędne wykresu siły normalnej są stałe. Wyznamy jednak wartość tej siły w celu potwierdzenia słuszności wcześniejszych uwag.

$$\sum_i P_{ix_2}^C = 0 \Leftrightarrow -N_{CB} + \frac{31}{8}ql \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow -N_{CB} + \frac{31}{8}ql \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow N_{CB} = \frac{93}{40}ql$$

$$\sum_i P_{iy_2}^C = 0 \Leftrightarrow -T_{CB} - \frac{31}{8}ql \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow -T_{CB} - \frac{31}{8}ql \cdot \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow T_{CB} = -\frac{31}{10}ql$$

Siły tnące  $T_{BC}$  i  $T_{CB}$  możemy również wyznaczyć z równań sumy momentów zapisanych dla pręta  $BC$  po wcześniejszym obliczeniu wartości momentu  $M_{BC}$ .



$$\sum_i M_{iC}^{BC} = 0 \Leftrightarrow -T_{BC} \cdot 5l - 3ql^2 + q \cdot 5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 5l = 0 \Rightarrow T_{BC} = \frac{1}{5l} \left( \frac{25}{2} - 3 \right) ql^2 = \frac{19}{10}ql$$

$$\sum_i M_{iB}^{BC} = 0 \Leftrightarrow -T_{CB} \cdot 5l - 3ql^2 - q \cdot 5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 5l = 0 \Rightarrow T_{CB} = \frac{1}{5l} \left( -\frac{25}{2} - 3 \right) ql^2 = -\frac{31}{10}ql$$

Po przekształceniu zależności różniczkowych otrzymujemy wzory na wartości funkcji siły tnącej  $T(x_k)$  w przekroju o współrzędnej  $x_k$  należącej do rozważanego przedziału. Korzystając z tego związku możemy sprawdzić wcześniejsze obliczenia.

$$\frac{dT}{dx} = -q_n(x) \Rightarrow dT = -q_n(x)dx \Rightarrow dT|_{x_0}^{x_k} = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow T|_{x_0}^{x_k} = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_k) - T(x_0) = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow T(x_k) = T(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx$$

$$T_{CB} = T_{BC} - q \cdot 5l = \frac{19}{10}ql - 5ql = -\frac{31}{10}ql$$

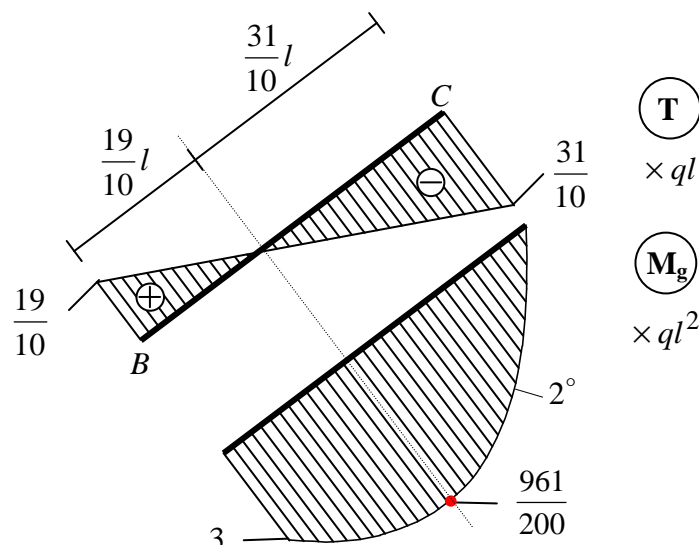
Niezależnie od wyboru sposobu wyznaczenia sił tnących otrzymujemy te same wartości. Siły  $T_{BC}$  i  $T_{CB}$  mają różne znaki. W takim przypadku wyznaczamy współrzędną przekroju, w którym siła tnąca ma wartość zerową. Znajomość tej współrzędnej pozwoli nam obliczyć wartość momentu ekstremalnego. Możemy w tym celu wykorzystać poniższy sposób, gdyż obciążenie normalne ma stałe natężenie. Zwrot lokalnej osi  $x_2$  przyjmujemy od punktu  $B$  do  $C$ .

$$x_{2_0} = \frac{T_{BC}}{q_n} = \frac{\frac{19}{10}ql}{q} = \frac{19}{10}l$$

Poza momentem  $M_{BC}$  wyznaczamy jeszcze moment ekstremalny oraz w celu sprawdzenia obliczeń  $M_{CB}$  (połączenie przegubowe). Moment  $M_{BC}$  rozciąga dolne/prawe włókna.

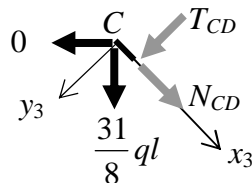
$$M\left(x_{2_0} = \frac{19}{10}l\right) = M_{\text{ekstr.}} = 3ql^2 + \int_0^{\frac{19}{10}l} T(x)dx = 3ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{10}ql \cdot \frac{19}{10}l = \left(3 + \frac{361}{200}\right) \cdot ql^2 = \frac{961}{200}ql^2$$

$$M_{CB} = M(x = 5l) = \frac{961}{200}ql^2 + \int_{\frac{19}{10}l}^{5l} T(x)dx = \frac{961}{200}ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{31}{10}ql\right) \cdot \frac{31}{10}l = \left(\frac{961}{200} - \frac{961}{200}\right) \cdot ql^2 \equiv 0$$



### Przedział C-D

W przedziale C-D nie występuje obciążenie ciągłe ( $q_n = q_s = 0$ ). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Składowa pionowa oddziaływania przegubu C ma kierunek nachylony do osi pręta C-D pod kątem  $45^\circ$ . Uwzględniając, że siła tnąca ma stałą wartość, możemy stwierdzić, iż wykres momentu gnącego będzie miał przebieg liniowy. W punkcie C wartość rzędnej na wykresie momentu jest zerowa, natomiast w punkcie D rzędna jest równa momentowi składowej pionowej  $V_C$  na ramieniu  $l$ . Moment  $M_{DC}$  powoduje rozciąganie prawych/górnych włókien.



$$\sum_i P_{ix_3}^C = 0 \Leftrightarrow N_{CD} + \frac{31}{8}ql \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{CD} + \frac{31}{8}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{CD} = -\frac{31\sqrt{2}}{16}ql$$

$$\sum_i P_{iy_3}^C = 0 \Leftrightarrow T_{CD} + \frac{31}{8}ql \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow T_{CD} + \frac{31}{8}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow$$

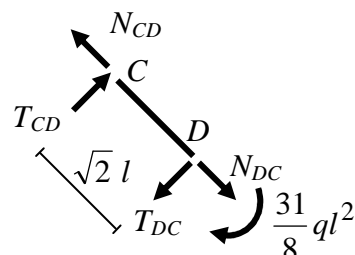
$$\Rightarrow T_{CD} = -\frac{31\sqrt{2}}{16}ql$$

$$T_{DC} = T_{CD} \Rightarrow T_{DC} = -\frac{31\sqrt{2}}{16}ql$$

$$N_{DC} = N_{CD} \Rightarrow N_{DC} = -\frac{31\sqrt{2}}{16}ql$$

$$M_{DC} = V_C \cdot l = \frac{31}{8}ql \cdot l \Rightarrow M_{DC} = \frac{31}{8}ql^2$$

Siły tnące  $T_{CD}$  i  $T_{DC}$  możemy również wyznaczyć z równań momentów zapisanych dla pręta CD po wcześniejszym obliczeniu wartości momentu  $M_{DC}$ .



$$\sum_i M_{iD}^{CD} = 0 \Leftrightarrow -T_{CD} \cdot \sqrt{2}l - \frac{31}{8}ql^2 = 0 \Rightarrow T_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}l} \left( -\frac{31}{8} \right) ql^2 = -\frac{31\sqrt{2}}{16} ql$$

$$\sum_i M_{iC}^{CD} = 0 \Leftrightarrow -T_{DC} \cdot \sqrt{2}l - \frac{31}{8}ql^2 = 0 \Rightarrow T_{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}l} \left( -\frac{31}{8} \right) ql^2 = -\frac{31\sqrt{2}}{16} ql$$

Niezależnie od wyboru sposobu wyznaczenia sił tnących  $T_{CD}$  i  $T_{DC}$  otrzymujemy te same wartości.

### Przedział D-E

W przedziale  $D-E$  nie występuje obciążenie ciągłe ( $q_n = q_s = 0$ ). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Reakcja pionowa podpory  $E$  ma kierunek osi pręta  $D-E$ . W dowolnym przekroju poprzecznym w przedziale  $D-E$  siła normalna ma zwrot siły ściskającej, a jej wartość bezwzględna jest równa  $R_E$ , natomiast siła tnąca ma wartość zerową. W związku z tym wykres momentu gnącego ma stałe rzędne o wartości  $M_E$ .

$$N_{ED} = -R_E = -\frac{31}{8}ql \Rightarrow N_{ED} = -\frac{31}{8}ql$$

$$N_{DE} = N_{ED} = -\frac{31}{8}ql \Rightarrow N_{DE} = -\frac{31}{8}ql$$

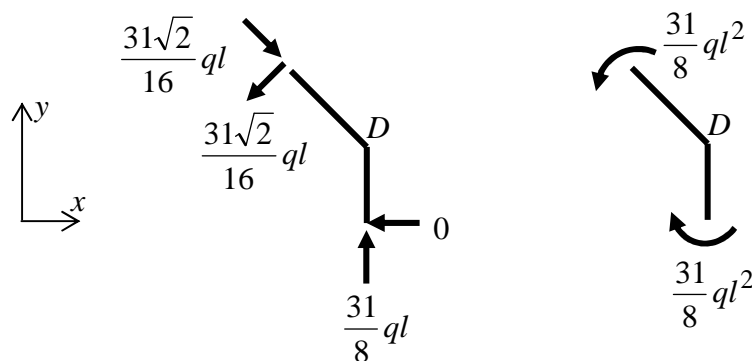
$$T_{ED} = 0 \qquad T_{DE} = T_{ED} = 0$$

$$M_{ED} = M_E = \frac{31}{8}ql^2 \qquad M_{DE} = M_{ED} = \frac{31}{8}ql^2$$

Momenty gnące w przedziale  $D-E$  rozciągają prawe włókna.

Sprawdzamy równowagę węzła  $D$ .

Węzeł  $D$



$$\sum_i P_{ix}^D = \frac{31\sqrt{2}}{16}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{31\sqrt{2}}{16}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{31}{16}ql - \frac{31}{16}ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^D = -\frac{31\sqrt{2}}{16}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{31\sqrt{2}}{16}ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{31}{8}ql = -\frac{31}{16}ql - \frac{31}{16}ql + \frac{31}{8}ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^D = -\frac{31}{8}ql^2 + \frac{31}{8}ql^2 \equiv 0$$

Równania spełnione są tożsamościowo.

Wykresy sił przekrojowych

