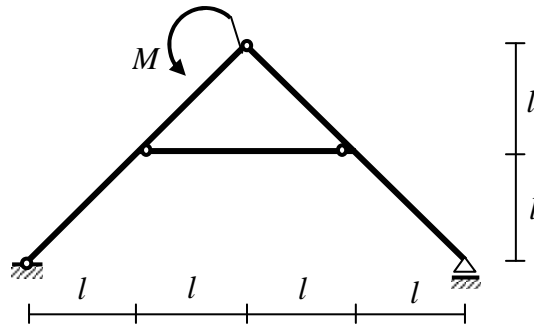
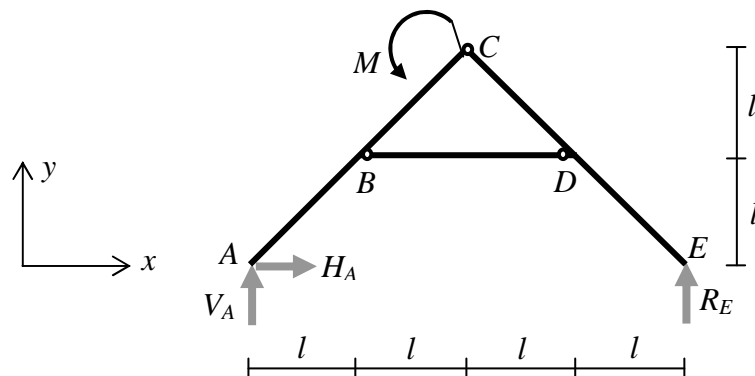


Przykład 8.2. Rama obciążona momentem skupionym

Polecenie: Dla poniższej ramy wyznaczyć funkcje sił przekrojowych oraz sporządzić ich wykresy.



Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory A i E oraz przeguby B, C i D. W układzie oswoobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory o nieznanymi wartościami oznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu ich wartości kolor zmieniamy na czarny.



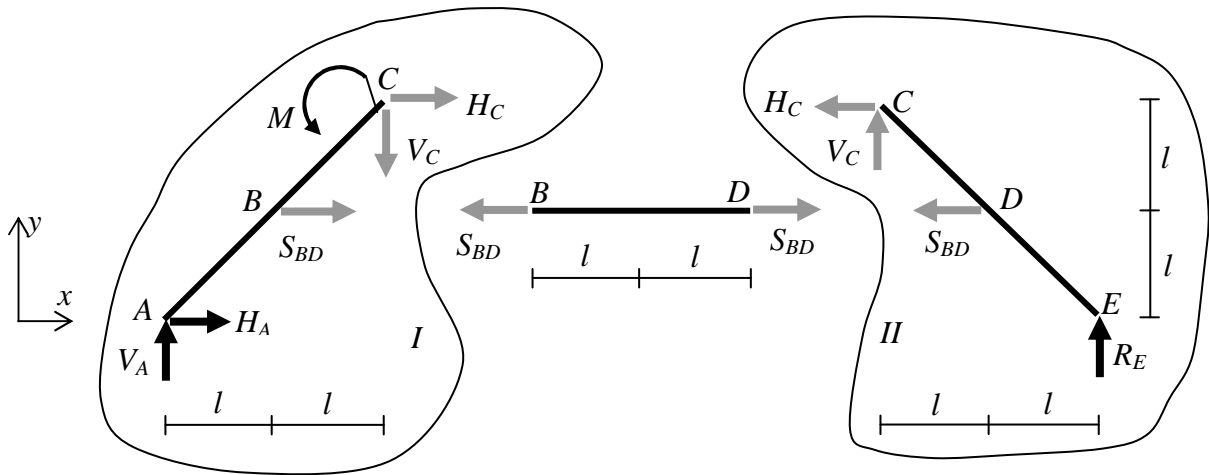
W równaniach równowagi momenty działające przeciwnie do ruchu wskazówek zegara opatrzone są znakiem dodatnim, natomiast działające zgodnie z ruchem wskazówek zegara znakiem ujemnym.

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Leftrightarrow H_A = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum_i M_{iA} = 0 \Leftrightarrow R_E \cdot 4l + M = 0 \Rightarrow R_E = -\frac{M}{4l}$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \Leftrightarrow V_A + R_E = 0 \Rightarrow V_A = -R_E \Rightarrow V_A = -\left(-\frac{M}{4l}\right) \Rightarrow V_A = \frac{M}{4l}$$

W punktach B i D występują połączenia przegubowe. Na pręt B-D nie działa obciążenie poprzeczne (prostopadłe do jego osi) oraz styczne. W takim przypadku pręt ten poddany jest wyłącznie działaniu stałej siły normalnej. W celu wyznaczenia siły S_{BD} dzielimy układ na podukłady I i II, prowadząc przekrój przez przegub C oraz pręt B-D. Przyjmujemy, że pręt B-D jest rozciągany. Rysując oddziaływania w przegubie C oraz siłę w przecie B-D musimy pamiętać o zasadzie działania i przeciwdziałania.



Z równania sumy momentów względem punktu C dla podukładu II wyznaczamy S_{BD} .

$$\sum_i M_C^II = 0 \Leftrightarrow R_E \cdot 2l - S_{BD} \cdot l = 0 \Rightarrow S_{BD} = 2 \cdot R_E = 2 \cdot \left(-\frac{M}{4l}\right) = -\frac{M}{2l}$$

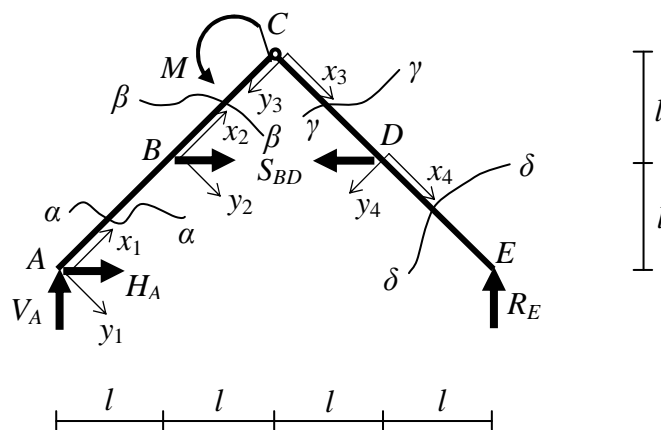
Ujemna wartość siły S_{BD} świadczy o tym, że pręt BD jest ściskany.

Sprawdźmy poprawność wartości wyznaczonych reakcji oraz siły S_{BD} zapisując równanie sumy momentów względem punktu C dla podukładu I. Równanie to wcześniej nie było wykorzystane.

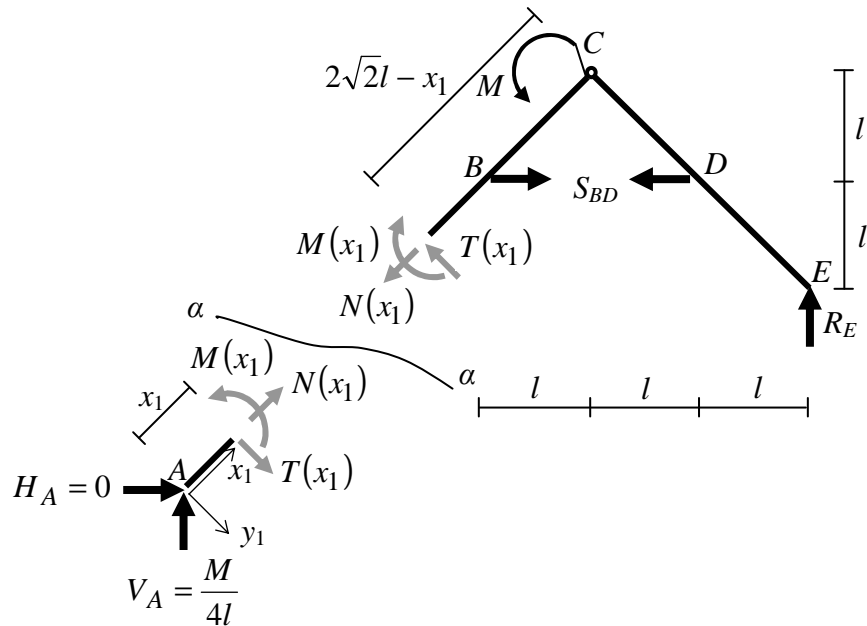
$$\begin{aligned} \sum_i M_C^I &= H_A \cdot 2l - V_A \cdot 2l + S_{BD} \cdot l + M = 0 \cdot 2l - \frac{M}{4l} \cdot 2l + \left(-\frac{M}{2l}\right) \cdot l + M = \\ &= 0 - \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M + M \equiv 0 \end{aligned}$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.

W celu wyznaczenia funkcji sił przekrojowych w czterech przedziałach ($A-B$, $B-C$, $C-D$ i $D-E$) wykonujemy „myślowo” przekroje w tych przedziałach. Wprowadzamy też układy lokalne x_i, y_i .



Przedział A-B, $x_1 \in \langle 0, \sqrt{2}l \rangle$



Funkcje sił przekrojowych wyznaczamy przekształcając równania równowagi zapisane dla wybranego podukładu. Funkcje te nie zależą od wyboru podukładu. Wobec tego należy kierować się analizą, dla którego podukładu nakład pracy rachunkowej będzie mniejszy. W rozpatrywanym przypadku warunek ten spełnia dolna część lewego pręta A-C. Kierunek reakcji V_A i H_A nachylony jest do osi układu lokalnego $x_1 y_1$ pod kątem 45° .

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \Leftrightarrow N(x_1) + V_A \cdot \cos 45^\circ + H_A \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N(x_1) = (-V_A - H_A) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \left\{ -\left(\frac{M}{4l}\right) - 0 \right\} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \Leftrightarrow T(x_1) - V_A \cdot \cos 45^\circ + H_A \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow T(x_1) = (V_A - H_A) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \left(\frac{M}{4l} - 0\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{T(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

Równanie sumy momentów zapisujemy względem punktu A.

$$\sum_i M_{iA} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) - T(x_1) \cdot x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = T(x_1) \cdot x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{M}{l}\right) \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l} \cdot x_1}$$

Funkcje sił $N(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ i $T(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Funkcje te spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(-\frac{\sqrt{2} M}{8 l}\right)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_1)}{dx_1} \equiv -q_s(x_1)$$

$$\frac{dT(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2} M}{8 l}\right)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_1)}{dx_1} \equiv -q_n(x_1)$$

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2} M}{8 l} \cdot x_1\right)}{dx_1} = \frac{\sqrt{2} M}{8 l} \Rightarrow \frac{dM(x_1)}{dx_1} \equiv T(x_1)$$

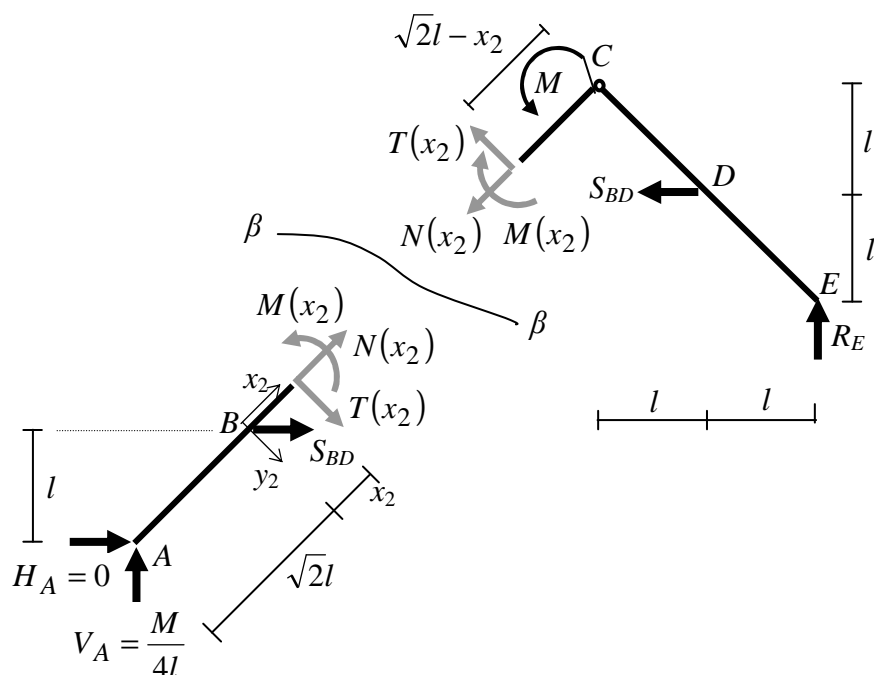
W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_1) = \frac{\sqrt{2} M}{8 l} \cdot x_1$ w przedziale A-B wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch punktach (przekrojach).

$$M(x_1 = 0) = \frac{\sqrt{2} M}{8 l} \cdot 0 = 0$$

$$M(x_1 = \sqrt{2}l) = \frac{\sqrt{2} M}{8 l} \cdot \sqrt{2}l = \frac{1}{4} M$$

Dodatnia wartość momentu $M(x_1 = \sqrt{2}l) = \frac{1}{4} M$ świadczy o tym, że moment ma zwrot zgodny z przyjętym i powoduje rozciąganie dolnych/prawych włókien.

Przedział B-C, $x_2 \in \langle 0, \sqrt{2}l \rangle$



Funkcje sił przekrojowych wyznaczamy przekształcając równania równowagi zapisane dla lewego podukładu. Funkcje te nie zależą od wyboru podukładu. Należy zatem wybrać podukład, dla którego nakład pracy rachunkowej będzie mniejszy. W rozpatrywanym przypadku warunek ten spełnia dolna część lewego pręta A-C. Kierunek reakcji V_A , H_A i siły S_{BD} nachylony jest do osi układu lokalnego x_2y_2 pod kątem 45° .

$$\sum_i P_{ix_2} = 0 \Leftrightarrow N(x_2) + V_A \cdot \cos 45^\circ + H_A \cdot \cos 45^\circ + S_{BD} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_2) = (-V_A - H_A - S_{BD}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left[-\left(\frac{M}{4l}\right) - 0 - \left(-\frac{M}{2l}\right) \right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

$$\sum_i P_{iy_2} = 0 \Leftrightarrow T(x_2) - V_A \cdot \cos 45^\circ + H_A \cdot \cos 45^\circ + S_{BD} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_2) = (V_A - H_A - S_{BD}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left[\left(\frac{M}{4l}\right) - 0 - \left(-\frac{M}{2l}\right) \right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{T(x_2) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

Równanie sumy momentów zapisujemy względem punktu B.

$$\sum_i M_{iB} = 0 \Leftrightarrow M(x_2) - T(x_2) \cdot x_2 + H_A \cdot l - V_A \cdot l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_2) = T(x_2) \cdot x_2 - H_A \cdot l + V_A \cdot l = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{M}{l} \right) \cdot x_2 - 0 \cdot l + \left(+\frac{1}{4} \cdot \frac{M}{l} \right) \cdot l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M(x_2) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_2}{l} + \frac{1}{4} \right) \cdot M}$$

Funkcje sił $N(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ i $T(x_2) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykazujemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_2} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_2)}{dx_2} \equiv -q_s(x_2)$$

$$\frac{dT(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_2} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_2)}{dx_2} \equiv -q_n(x_2)$$

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_2}{l} + \frac{1}{4}\right) \cdot M\right)}{dx_2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l} \Rightarrow \frac{dM(x_2)}{dx_2} \equiv T(x_2)$$

$$\sum_i P_{iy_3} = 0 \Leftrightarrow -T(x_3) - R_E \cdot \cos 45^\circ + S_{BD} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_3) = (-R_E + S_{BD}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left[-\left(-\frac{M}{4l}\right) + \left(-\frac{M}{2l}\right) \right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{T(x_3) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

Równanie sumy momentów zapisujemy względem punktu C dla części górnej pręta CE (od punktu C do przekroju $\gamma - \gamma$).

$$\sum_i M_{iC} = 0 \Leftrightarrow M(x_3) - T(x_3) \cdot x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_3) = T(x_3) \cdot x_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{M}{l}\right) \cdot x_3 \Rightarrow \underline{M(x_3) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_3}{l}\right) \cdot M}$$

Funkcje sił $N(x_3) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ i $T(x_3) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykazujemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = \frac{d\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_3)}{dx_3} \equiv -q_s(x_3)$$

$$\frac{dT(x_3)}{dx_3} = \frac{d\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_3)}{dx_3} \equiv -q_n(x_3)$$

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} = \frac{d\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_3}{l}\right) \cdot M\right)}{dx_3} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l} \Rightarrow \frac{dM(x_3)}{dx_3} \equiv T(x_3)$$

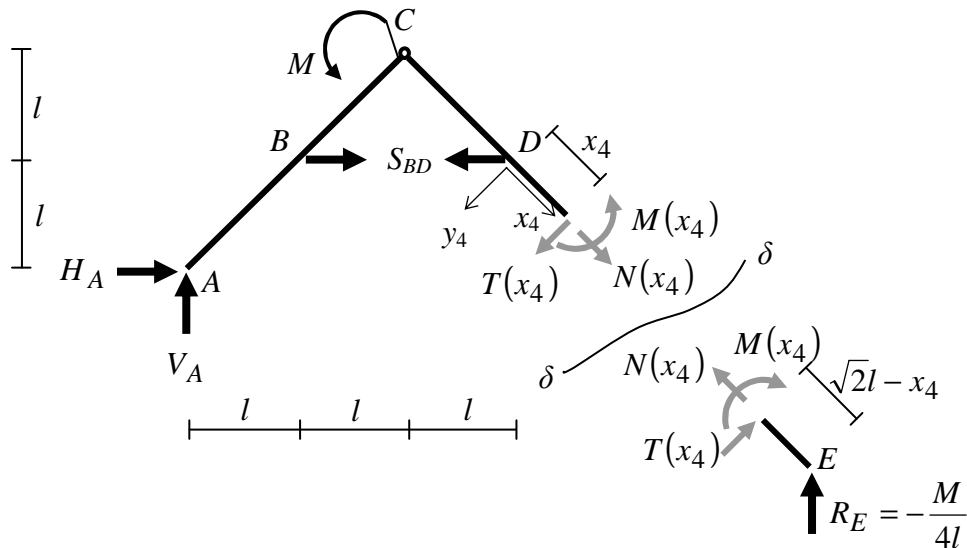
W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją liniową $M(x_3) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_3}{l}\right) \cdot M$ w przedziale $B-C$ wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch przekrojach.

$$M(x_3 = 0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{0}{l}\right) \cdot M = 0$$

$$M(x_3 = \sqrt{2}l) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}l}{l}\right) \cdot M = -\frac{1}{4} M$$

Wartość ujemna momentu oznacza, że moment gnący ma zwrot przeciwny do założonego i powoduje rozciąganie górnych/prawych włókien.

Przedział D-E, $x_4 \in \langle 0, \sqrt{2}l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla prawego podkadłtu. Kierunek reakcji R_E nachylony jest do osi układu lokalnego $x_4 y_4$ pod kątem 45° .

$$\sum_i P_{ix_4} = 0 \Leftrightarrow -N(x_4) - R_E \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N(x_4) = -R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(-\frac{M}{4l}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

$$\sum_i P_{iy_4} = 0 \Leftrightarrow -T(x_4) - R_E \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow T(x_4) = -R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(-\frac{M}{4l}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{T(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}}$$

Równanie sumy momentów zapisujemy względem punktu E dla części dolnej (od przekroju $\delta - \delta$ do punktu E)

$$\sum_i M_{iE} = 0 \Leftrightarrow -M(x_4) - T(x_4) \cdot (\sqrt{2}l - x_4) = 0 \Rightarrow M(x_4) = -T(x_4) \cdot (\sqrt{2}l - x_4) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{M}{l}\right) \cdot (\sqrt{2}l - x_4) \Rightarrow \underline{M(x_4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_4}{l} - \frac{1}{4}\right) \cdot M}$$

Funkcje sił $N(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ i $T(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykazujemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_4)}{dx_4} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_4} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_4)}{dx_4} \equiv -q_s(x_4)$$

$$\frac{dT(x_4)}{dx_4} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l}\right)}{dx_4} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_4)}{dx_4} \equiv -q_n(x_4)$$

$$\frac{dM(x_4)}{dx_4} = \frac{d\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_4}{l} - \frac{1}{4}\right) \cdot M\right)}{dx_4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{l} \Rightarrow \frac{dM(x_4)}{dx_4} \equiv T(x_4)$$

W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją liniową $M(x_4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x_4}{l} - \frac{1}{4}\right) \cdot M$ w przedziale $D-E$ wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch przekrojach.

$$M(x_4 = 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{0}{l} - \frac{1}{4}\right) \cdot M = -\frac{1}{4} M$$

$$M(x_4 = \sqrt{2}l) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}l}{l} - \frac{1}{4}\right) \cdot M = 0$$

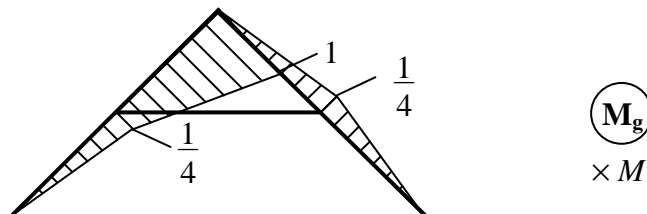
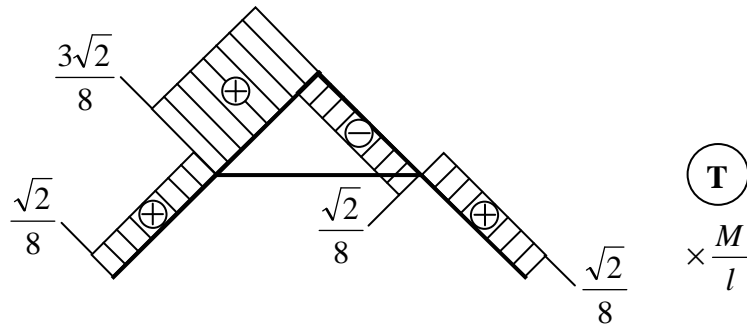
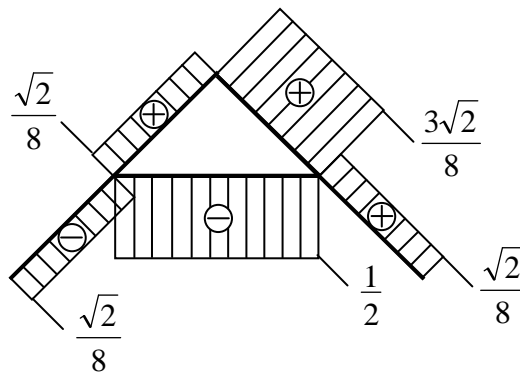
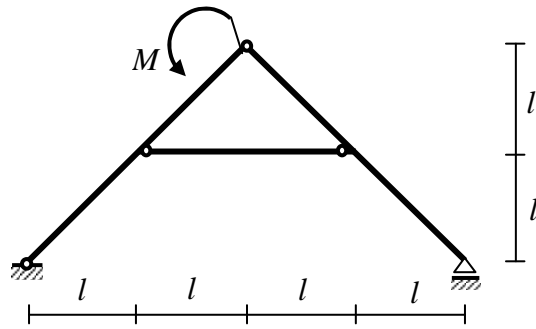
Wartość ujemna momentu oznacza, że moment gnący ma zwrot przeciwny do założonego. Oznacza to, że rozciąga górne/prawe włókna. Zwróćmy również uwagę, iż

$$M(x_3 = \sqrt{2}l) = M(x_4 = 0) = -\frac{1}{4} M.$$

Funkcje $N(x_2)$, $T(x_2)$ i $M(x_2)$ oraz $N(x_3)$, $T(x_3)$ i $M(x_3)$ można wyznaczyć korzystając z równań równowagi zapisanych dla podukładów między przekrojem $\beta-\beta$ i punktem C oraz punktem C i przekrojem $\gamma-\gamma$. W celu zapisania równań rzutów sił w wymienionych podukładach należałoby wyznaczyć oddziaływania V_C i H_C . Wykorzystane zostało jedynie równanie momentów względem punktu C dla jednego z wymienionych podukładów. W tym równaniu składowe V_C i H_C mają zerowe momenty względem punktu C , a zatem nie wystąpiła konieczność wyznaczenia ich wartości.

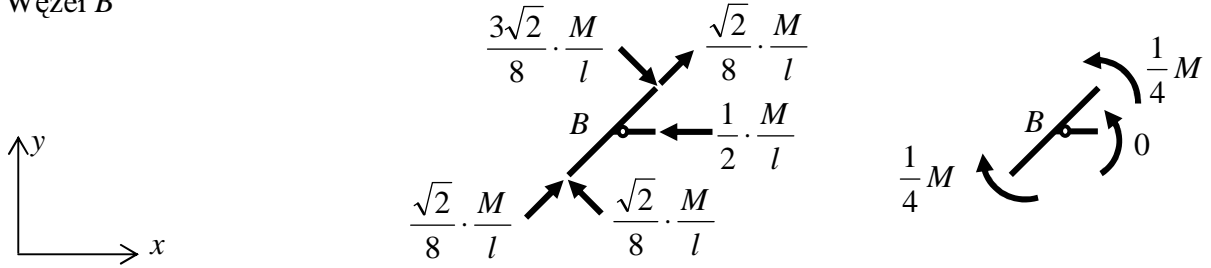
Obciążenie ramy stanowi moment skupiony, natomiast nie występuje w rozważanym układzie obciążenie ciągłe. W związku z tym w każdym przedziale zarówno wykresy siły normalnej jak i tnącej mają w każdym przedziale stałe rzędne, a wykres momentu gnącego jest liniowy. Rysując rzędne wykresów należy zachować skalę.

Wykresy sił przekrojowych



Sprawdzimy również równowagę węzłów B, C i D. Wprowadzamy myślowo przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Węzeł B

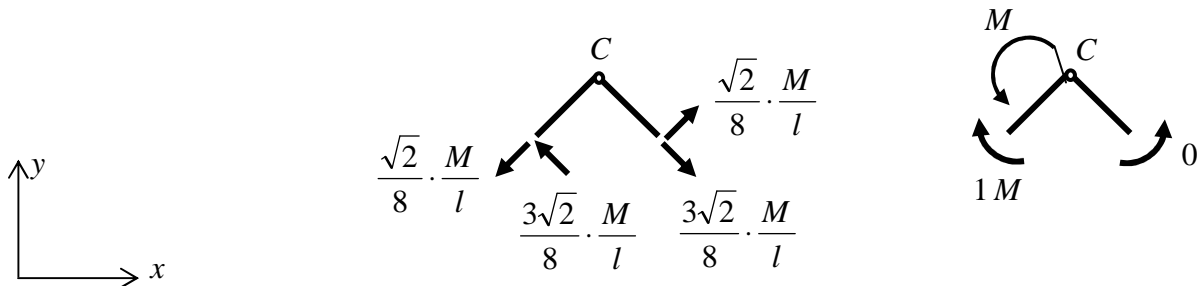


$$\sum_i P_{ix}^B = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^B = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^B = -\frac{1}{4}M + \frac{1}{4}M + 0 \equiv 0$$

Węzeł C

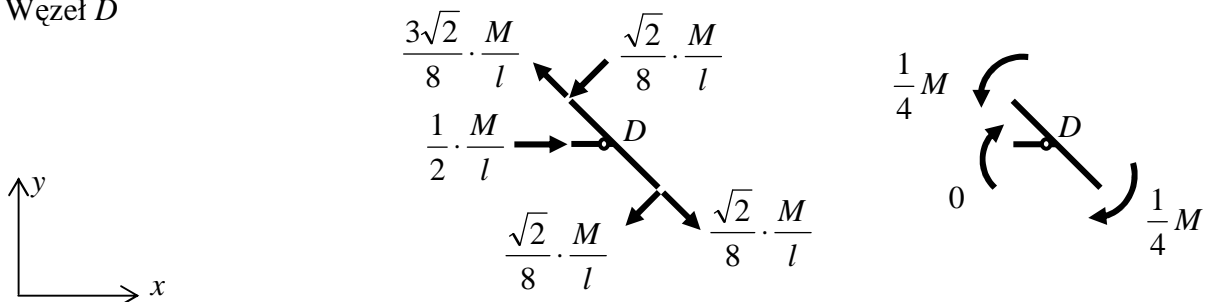


$$\sum_i P_{ix}^C = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^C = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^C = -M + M + 0 \equiv 0$$

Węzeł D



$$\sum_i P_{ix}^D = \left[\left(-\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^D = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{M}{l} \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^D = \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}M - 0 \equiv 0$$

Wszystkie równania równowagi zapisane dla węzłów B , C i D spełnione są tożsamościowo.